

第4章 モナド

モナド (monad) は、Haskell (あるいは他の関数型言語) で破壊的代入 (変数の値など状態を変更すること) や入出力のような、他の言語では“副作用” (side effect) として実現される特徴を扱うための手法である。

もともとは数学のカテゴリー理論 (圏論) で使われている言葉を借用したものであるが、Haskell で使用するときには、背景となるカテゴリー理論のことを知っている必要はない。

4.1 参照透明性と副作用

純粋な関数型言語には、式は値を表すためだけのものであり、「変数の出現はその定義 (変数 = 式) の右辺の式で置き換えても全体の意味は変わらない」という性質がある。このような性質を 参照透明性 (referential transparency) と呼び、プログラムの“意味”を考察していく上でとても重要な性質である。(参照透明性のおかげで、帰納法などによる証明が容易になる。) 一方、副作用は、式がその 副作用 のことである。式が副作用を持ちうるということは、その言語では参照透明性が成り立たない、ということである。Haskell の式は副作用を持っていない。

C のような言語では、入出力や破壊的代入を扱う部分では、副作用を使っているため参照透明性は成り立たない。例えば、C で、

```
1 c = getchar(); putchar(c); putchar(c); // C-code ①
```

と

```
1 putchar(getchar()); putchar(getchar()); // C-code ②
```

とは、`getchar()` が副作用を持っているために異なるプログラムである。(上のプログラムでは 1 文字、下のプログラムではキーボードから 2 文字の入力が消費される。)

一見、参照透明性と入出力や破壊的代入は相容れない性質のように見える。しかし、Haskell では次のように考える。

入出力や、変数などの状態の変更は、何らかの“アクション”である。副作用を持つ C 言語などの関数に対応する Haskell の関数は、このアクションを含めて戻り値として返す関数として考える。(つまりアクションを“副”作用ではなく、一人前の値として扱う。) この“アクション”の型は、単なる値とは異なる型を持っていて、アクションに対応している文脈でしか使用することができない。従って、アクションと値は区別され、参照透明性が保たれる。

例えば、C 言語の `getchar`, `putchar` に対応する Haskell の関数は、`getChar`, `putChar` という名前と、それぞれ次のような型を持っている。

```
1 getChar :: IO Char
2
3 putChar :: IO Char
```

この IO という型構成子が入出力に関するアクションの型を表す。また、() はユニット型と読み、意味のある値を持たない型である。そもそも、C 言語の `putchar(getchar())` という式に対応する `putChar getChar` のような Haskell の式は、型エラーになってしまう。IO 型に用意されている演算子「>>=」(バインド、と読む)を用いて、次のように書かなければいけない。

```
1 getChar >>= (\ c -> putChar c)
```

ここで、(>>=) の型は `IO a -> (a -> IO b) -> IO b` である。(後述するように、実際にはより一般的な型を持っている。)この式では、`getChar` というアクションの結果得られる `Char` 型の値が、`c` という変数に束縛され、続いて `putChar c` というアクションが実行される。アクションの型 (`IO Char`) を持つ式から `Char` 型の値だけを抽出するには、「>>=」のような演算子を介する必要がある。`Char` 型の変数 `c` に対して、`c = getChar` と書けるわけではないので、型の面からも `c` が `getChar` と置き換えられないことが明白である。

Q 4.1.1 C-code ① と C-code ② に対応する Haskell プログラム (の断片) を `getChar`, `putChar`, `>>=`, `>>` を使って書け。ただし `>>` は次のように定義される演算子である。

```
1 m >> n = m >>= (\ _ -> n)
```

副作用を持つプログラムは実行する順番により意味が変わるので、並列に実行されるプログラムでは問題となることがある。参照透明性を保ちながらアクションを扱えることは並列実行しても意味が変わらないので理論的に有用であるだけでなく、並列コンピューティングなど実用面でも必要となってきた。

4.2 モナドとは

このような、さまざまな言語で副作用として実現される特徴 (入出力・破壊的代入・例外処理・非決定性など) に対するアクションの型が、実は共通の構造を持っていて、同じ構造を持つ演算子で取り扱えることがわかっている。この共通の構造を持つ型 (正確には型構成子) のことを (monad) という。つまり、モナドはアクションの型である。上記の IO もモナドである。ただし、モナドの中にはアクションという言葉がふさわしくないものもあるので、以下では代わりに“計算” (computation) という言葉を使う。

具体的にはモナドとは

```
return :: a -> M a
(>>=) :: M a -> (a -> M b) -> M b
```

という型の関数の存在する型構成子 M のことである。より厳密には、`return`, `(>>=)` が

```
(return a) >>= k      = k a
m >>= (\a -> return a) = m
(m1 >>= k1) >>= k2    = m1 >>= (\a -> (k1 a >>= k2))
```

の3つの等式 (monad law) を満たす必要がある。これらの等式は、直感的には `return` が `(>>=)` の "単位元" であること、`(>>=)` が結合則を満たすこと、を示している。つまり、数に対する、加算 (+) と加算の単位元 0 の次の等式に相当する。

```
0 + x      = x
x + 0      = x
(x + y) + z = x + (y + z)
```

直観的には Ma という型は、_____ または " a のアクション" の型を意味する。また、`return` と `(>>=)` の直観的な意味は次の通りである。

- `return a ...` 値 a をそのまま返す **何もしない (アクションが実質ない)** 計算を表す。
- `m >>= k ...` まず、 $m :: Ma$ を計算し、その結果のアクションを除いた値の部分に関数 $k :: a \rightarrow Mb$ に渡して、続けて計算することを表す。また、アクションは m, k のアクションを続けて実行するアクションに相当する。

4.3 モナドと型クラス

モナド M の定義は模倣したい副作用により異なるし、付随する関数 `return`, `(>>=)` の定義ももちろん異なる。しかし、`return`, `(>>=)` は M をパラメータとして、決まった型を持つので、型クラスを用いてアドホック多相な関数として定義することができる。

```
1 class Monad m where
2   return :: a -> m a
3   (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

実際は、`Monad` は型ではなく、型構成子に対する型クラス (型構成子クラス, type constructor class) になっている。

4.4 IO モナド

IO は Haskell の Prelude (最初から読み込まれているライブラリー) に入っているモナドである。型クラス `Monad` のインスタンスである。その定義は一般のプログラマーからは見えない組込みの型となっている。ただし、直観的には次のような定義を持つ型だと考えることができる。

```
-- type IO a ≍ _____
-- instance Monad IO where
-- -- 注: 実際には type で定義された型名を instance には使えない。
```

```
-- return a = \ w -> (a,w)
-- m >>= k = \ w -> let (a,w1) = m w in k a w1
```

ただし RealWorld は、コンピューター全体のファイルなどの状態を表す型である。IO は関数の型だが、引数の RealWorld 型のデータは隠されていて、他の計算で使われないことが保証できるため、破壊的に書き換えて、戻り値の RealWorld 型のデータのために使っても良い、ということである。

IO は Haskell で入出力や状態を効率的に扱うために、処理系で特別な扱いを受ける。主なプリミティブとして、putChar, getChar の他にも、以下のような関数がある。

```
1 putStr    :: String -> IO () -- 文字列を出力する
2 putStrLn :: String -> IO () -- 文字列を出力して改行する
3
4 getLine   :: IO String      -- 一行を読み込む
5 getContents :: IO String    -- EOF まで読み込む
6
7 print     :: Show a => a -> IO ()
8           -- 文字列に変換して出力し、改行する
9 readLn   :: Read a => IO a
10          -- 一行を読み込んでパースする
```

特に getContents は遅延評価で標準入力の内容を読み込む。言い換えれば、必要にならなければ入力を求めない。これらの他に、標準入出力ではなくファイルに対して入出力するための関数なども用意されている。

ところで、Haskell のプログラムを、GHCi のような対話環境ではなく、ghc コマンドで実行可能ファイルにコンパイルして実行するとき、C と同じように main という名前の関数から実行が開始される約束になっている。そして main 関数は、IO t という形の型 (t は任意の型) を持たなければいけないことになっている。

つまり次のようなプログラムでは、標準入力のすべてを読み込むことはなく、最初の 1 行のみを出力する。

```
1 main :: IO ()
2 main = getContents >>=
3       (\ all -> let ls = lines all
4                 in putStrLn (head ls))
```

ただし、lines :: String -> [String] は文字列を改行文字で分割する関数、head :: [a] -> a はリストの先頭要素を返す関数である。

たとえば、標準入力から読み込んだ文字列の大文字を小文字に変換したものと小文字を大文字に変換したものを出力するプログラムは以下のようになる。

```
1 import Data.Char -- Data.Charモジュールを importする
2
3 -- toLower, toUpper :: Char -> Char
4 --     は大文字・小文字の変換関数
5 main :: IO ()
6 main = getContents >>=
7       (\ s -> putStrLn (map toLower s
8                           ++ map toUpper s))
```

上記の定義は括弧を省略し、さらにレイアウトを整えて、次のように書くことが多い。

```
1 main = getContents          >>= \ s ->
2     putStr (map toLower s ++ map toUpper s)
```

以降のプログラムでは、このように括弧を省略する。

実は、Haskell では Monad クラスに対して、`do` 記法という糖衣構文を用意していて、この関数は次のように書くこともできる。

```
1 main = do { s <- getContents;
2           putStr (map toLower s ++ map toUpper s) }
```

この `do` 式も第 A 章で紹介したレイアウトルールの対象であり、適切にレイアウトすればブレースやセミコロンを省略することができる。

```
1 main = do s <- getContents
2         putStr (map toLower s ++ map toUpper s)
```

そして `do` 式は次のルールで翻訳される。（下線部に翻訳規則を再帰的に適用していく。）

```
do { e }                ⇒ e
do { e; stmts }         ⇒ e >>= \ _ -> do { stmts }
do { x <- e; stmts }    ⇒ e >>= \ x -> do { stmts }
do { let decls; stmts } ⇒ let decls in do { stmts }
```

（実は、この翻訳規則はリストの内包表記の翻訳規則とほとんど同じである。）

Q 4.4.1 つぎのようなプログラムを上記の IO に関する関数を用いて定義せよ。

ヒント: 入力には `getContents` ではなく、`getLine` を使用せよ。

1. 一行だけ行を読み込んで、それをオウム返りするプログラム
2. 一行だけ行を読み込んで、それを 2 回オウム返りするプログラム
3. 整数を読み込んで、その 3 倍を出力するプログラム
4. 正の整数を読み込んで、その数を辺の長さとして、* で三角形を表示するプログラム

なお、**for** 文などの繰返しのための構文はないので、繰返しが必要なときは再帰関数を定義する必要がある。例えば、入力文字列の各行の先頭の単語だけを大文字にするプログラムは `map` を使って次のように定義することができる。

```
1 import Data.Char
2
3 capitalizeFirst [] = []
4 capitalizeFirst (xs:xss) = (map toUpper xs) : xss
5
6 capitalizeLine line
7     = unwords (capitalizeFirst (words line))
8
9 main = do all <- getContents
10         let xs = lines all
11             ys = map capitalizeLine xs
12         putStr (unlines ys)
```

問 4.4.2 IO モナドを利用して次のようなプログラムを作成せよ。（あとの節で紹介しているライブラリー関数を使用するかもしれない。）

1. 入力文字列を行毎に大文字と小文字に変換して出力する。（例えば、「Hello,World」が「hello,HELLO,worldWORLD」になる。ただし、“`\n`” は改行文字を表すとする。）
2. 入力文字列中の数字 ('0' ~ '9') の出現回数をカウントして出力する。
3. 入力文字列中の '@' が出現する最初の 10 行だけを出力する。

4.5 参照型と可変な配列型

さらに、`Data.IORef` というモジュールを `import` することで、破壊的代入が可能な参照 (reference) 型 (`IORef`) を扱う関数も用意される。

```
1 -- import Data.IORef が必要
2
3 newIORef    :: a -> IO (IORef a)    -- 新しい参照の作成
4 readIORef  :: IORef a -> IO a      -- 参照の読出し
5 writeIORef :: IORef a -> a -> IO () -- 参照への書込み
```

次に、`IORef` を利用したプログラムの例をあげる。

```
1 import Data.IORef
2
3 foo r = do i <- readIORef r
4           if i <= 0 then return ()
5           else do
6               putStrLn (show i)
7               writeIORef r (i - 1)
8               foo r
9
10 main = do r <- newIORef 10
11         foo r
```

ただし、これは無理矢理 `IORef` を使った例であり、`IORef` を使わずに同じ動作をする次のようなプログラムのほうが自然である。

```
1 {- foo の自然な定義は以下の通り -}
```

```

2 foo i = if i <= 0 then return ()
3         else do putStrLn (show i)
4                 foo (i - 1)
5
6 main = foo 10

```

また `Data.Array.IO` というモジュールを `import` することで、破壊的代入が可能な配列を扱う関数も用意される。破壊的代入を使わない配列の操作は、配列をいちいちコピーすることになって極めて非効率的なので、配列には破壊的代入は実質的に不可欠である。（破壊的代入を使わないと、配列を書き換えるたびに新しい配列を用意することになる。）

```

1  -- import Data.Array.IO が必要
2
3  newArray  :: Ix i => (i, i) -> e -> IO (IOArray i e)
4  -- 添字の最小・最大の組と要素の初期値を受け取って
5  -- 新しい配列を作る
6  getBounds :: Ix i => IOArray i e -> IO (i, i)
7  -- 配列の添字の最小と最大を返す
8  readArray :: Ix i => IOArray i e -> i -> IO e
9  -- 配列と添字を受け取って、その要素を読む
10 writeArray :: Ix i => IOArray i e -> i -> e -> IO ()
11 -- 配列と添字と値を受け取って、要素に書き込む

```

次に、`Data.Array.IO` を利用したプログラムの例をあげる。ここで `randomArray` は乱数で初期化した配列を作成する関数、`printArray` は配列の要素を出力する関数、`accumArray` は配列を破壊的に書き換えて足し算をする関数である。

```

1 {-# LANGUAGE FlexibleContexts #-}
2 import Data.Array.IO
3 import System.Random
4
5 randomArray ::
6   Int -> Int -> Int -> Int -> IO (IOArray Int Int)
7 randomArray i1 i2 mn mx = do
8   arr <- newArray (i1,i2) mn -- 仮に mn で初期化する
9   loop i1 i2 mn mx arr
10  return arr
11  where
12    loop i i2 mn mx a
13      | i > i2    = return ()
14      | otherwise = do r <- randomRIO (mn, mx)
15                      writeArray a i r
16                      loop (i + 1) i2 mn mx a
17
18 printArray :: Show a => IOArray Int a -> IO ()
19 printArray arr = do
20   (i1,i2) <- getBounds arr
21   loop i1 i2 arr
22   where
23     loop i1 i2 arr | i1 > i2    = return ()
24                   | otherwise = do
25     a <- readArray arr i1
26     putStr (show a)
27     putStr ", "
28     loop (i1 + 1) i2 arr
29
30 accumArray arr = do
31   (i1, i2) <- getBounds arr
32   loop i1 i2 0 arr

```

```

33   where
34     loop i1 i2 v arr | i1 > i2 = return ()
35                       | otherwise = do
36       a <- readArray arr i1
37       let w = a + v
38       writeArray arr i1 w
39       loop (i1 + 1) i2 w arr
40
41 main = do arr <- randomArray 1 5 0 100
42         printArray arr
43         putStrLn ""
44         accumArray arr
45         printArray arr
46         putStrLn ""

```

冒頭の {-# LANGUAGE FlexibleContexts #-} はプラグマというコンパイラーに与える指令で、ここでは詳細には立ち入らないが、Data.Array.IOを使うときは付けておくことをお勧めする。

このプログラムを実行すると、例えば次のような出力が得られる。

```

56, 36, 76, 44, 10,
56, 92, 168, 212, 222,

```

(ほぼ) 対応する C 言語のプログラムは以下のようになる。

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4
5 int* randomArray(int n, int min, int max) {
6     srand((unsigned)time(NULL));
7     int* arr = (int*)malloc(n * sizeof(int));
8     for (int i = 0; i < n; i++) {
9         arr[i] = min + rand() % (max - min + 1);
10    }
11    return arr;
12 }
13
14 void printArray(int n, int* arr) {
15     for (int i = 0; i < n; i++) {
16         printf("%d, ", arr[i]);
17     }
18 }
19
20 void accumArray(int n, int* arr) {
21     int v = 0;
22     for (int i = 0; i < n; i++) {
23         v += arr[i];
24         arr[i] = v;
25     }
26 }
27
28 int main(void) {
29     int n = 5;
30     int* arr = randomArray(n, 0, 100);
31     printArray(5, arr);
32     printf("\n");
33     accumArray(5, arr);
34     printArray(5, arr);
35     printf("\n");
36
37     return 0;

```


4.6 続・有用なリスト処理関数

モナドとは直接関係ないが、以前紹介した以外に文字列処理プログラムで有用と思われるリスト処理関数を、以下でいくつか紹介する。これらの関数は `sort` を除いて `Prelude` (標準ライブラリー) に定義済みである。

```

1  -- lines は文字列を改行文字のところで分割して、文字列 (単語)
2  -- のリストにする
3  -- 結果の文字列には改行文字は含まれない
4  lines      :: String  -> [String]
5
6  -- words は文字列を空白文字で分割して、文字列のリストにする
7  words     :: String  -> [String]
8
9  -- unlines は lines の逆操作である
10 -- 各文字列の末尾に改行文字を追加し、一つに結合する
11 unlines   :: [String] -> String
12
13 -- unwords は words の逆操作である
14 -- 各文字列を空白で区切って結合する
15 unwords   :: [String] -> String
16
17 -- takeWhile は述語 p とリスト xs を受け取り, p を満たす
18 -- 要素だけからなる xs の最も長い先頭部分 (空の場合もある) を
19 -- 返す
20 -- > takeWhile (< 3) [1,2,3,4,-1,0,3,4] == [1,2]
21 -- > takeWhile (< 9) [1,2,3] == [1,2,3]
22 -- > takeWhile (< 0) [1,2,3] == []
23 takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
24
25 -- dropWhile p xs は takeWhile p xs の残りの末尾部分
26 -- を返す
27 -- > dropWhile (< 3) [1,2,3,4,5,1,2,3]
28 ---      == [3,4,5,1,2,3]
29 -- > dropWhile (< 9) [1,2,3] == []
30 -- > dropWhile (< 0) [1,2,3] == [1,2,3]
31 dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
32
33 -- any は述語とリストを受け取り、リストのなかのどれかの要素が
34 -- 述語を満たすかどうか判定する
35 any      :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
36
37 -- all は述語とリストを受け取り、リストのなかのすべての要素が
38 -- 述語を満たすかどうか判定する
39 all      :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
40
41 -- head はリスト (空ではいけない) の先頭要素を取り出す
42 head     :: [a] -> a
43
44 -- last は (非空かつ有限な) リストの最後の要素を取り出す
45 last     :: [a] -> a
46
47 -- tail はリスト (空ではいけない) の先頭要素を除いた末尾部分
48 -- を取り出す
49 tail     :: [a] -> [a]
50
51 -- elem はリストの要素 (element) として含まれているか否か
52 -- を判定する
53 -- 通常 x `elem` xs のように中置記法で用いることが多い
54 elem     :: (Eq a) => a -> [a] -> Bool
55

```

```

56 -- import Data.List が必要である
57 -- sort は安定なソートアルゴリズムの実装である
58 -- 比較関数を引数にとる sortBy 関数もある
59 sort      :: (Ord a) => [a] -> [a]
60
61 -- sequence はリスト中のアクションを順に実行する。
62 sequence  :: Monad m => [m a] -> m [a]
63 sequence []      = return []
64 sequence (m:ms) = m      >>= \ a ->
65                       sequence ms >>= \ as ->
66                       return (a:as)
67
68 -- mapM はアクションを返す関数をリスト中の全ての要素に
69 -- 適用する
70 -- ex.) mapM putStrLn ["ab", "xyzw", "12345"]
71 mapM      :: Monad m => (a -> m b) -> [a] -> m [b]
72 mapM f as = sequence (map f as)

```

Q 4.6.1 次の式の値は何か？

1. `drop 2 [1,4,5]`
2. `takeWhile (< 0) [-1,-3,2,-2,7]`
3. `any (> 0) [-1,-3,-5]`
4. `3 `elem` [2,5,3,1]`

4.7 さらに詳しく知りたい人のために...

文献 (Wadler 1990) は、モナドとリストの内包表記の関係について解説している。

- [1] **(Wadler 1990)** Philip Wadler, "Comprehending Monads" ACM Conference on Lisp and Functional Programming, Nice (France), 1990 年 6 月

この他に $1, 2, 3, \dots$ や $+$, $-$ などの定数を導入する場合もあるが、しばらくは、変数・関数適用・関数抽象の3つのみからなる純ラムダ計算を紹介する。

ラムダ式の例

1. $(\lambda x. x)$ — これは x という引数を受け取って、 x をそのまま返すので、恒等関数を表している。Scheme の記法ならば `(lambda (x) x)` という関数であり、C ならば、

```
int id(int x) { return x; }
```

という関数 `id` に相当する。(λ式や Scheme では x が `int` 型という制限はないが、C ではこのように型の制限のない関数を定義することはできないので、便宜上 `int` 型にしている。)

2. $(\lambda x. (\lambda y. x))$ — これは、 x という引数を受け取り、 $(\lambda y. x)$ という関数を返す関数である。そして、 $(\lambda y. x)$ という関数は、 y という引数を受け取り、(これを無視して) x を返す関数である。つまり、式全体は高階関数である。

λ記法には、多引数の関数を表す記法はないので、このような“関数を返す関数”で、多引数関数の代用とすることが行われる。つまり、C の記法で、

```
int foo(int x, int y) { return x; }
```

と表される2引数の関数を $(\lambda x. (\lambda y. x))$ と書いてしまうのである。このように、多引数関数を“関数を返す関数”として表現することを、_____ _____ と言う。カーリー (Curry) は、著名な数理論理学者 Haskell B. Curry (1900–1982) の名にちなんでいる。

3. $(\lambda f. (\lambda x. (f(fx))))$ — 関数 f とデータ x を受け取って、 f を x に2回適用する関数である。

L.3 ラムダ計算のきまり (計算規則)

算数で $1 + 2 \times 3 \rightarrow 1 + 6 \rightarrow 7$ というように計算の規則があるように、ラムダ計算も計算規則 (書き換え規則) が決められている。例えば $(\lambda x. x)$ は恒等関数であり、任意のラムダ式 M に対して、 $((\lambda x. x)M) \rightarrow M$ と書き換えることができる。また、

$$(((\lambda f. (\lambda x. (f(fx))))M)N) \rightarrow ((\lambda x. (M(Mx)))N) \rightarrow (M(MN))$$
である。

ラムダ計算の変換規則を正式に紹介する前に、いくつかの必要な用語を説明しておく。

束縛変数・自由変数

$(\lambda x. M)$ という部分式があるとき、 x はこの部分式で束縛され (bound) ているという。このとき、 M の中で出現 (occur) する変数 x を _____ (bound variable) という。束縛変数でない (自由に出現する) 変数を _____ (free variable) という。(なお、λのすぐあとに書かれる変数は、そもそも出現にカウントしない。)

例えば、 $(\lambda x. (xy))$ の x は束縛変数だが、 y は自由変数である。また、 $((\lambda z. z)z)$ の z は束縛された形でも、自由にも出現している。一番右端の z は $(\lambda z. \dots)$ という形の中に入っていないからである。

この最後の例のように、束縛変数と自由変数に同じ名前が使われていると、混乱の元である。そこで、以下の議論では束縛変数は自由変数と名前がぶつからないように、適宜、名前の付け替えをするものと仮定する。

QL3.1 以下のラムダ式の変数の出現のうち、どれが自由変数、どれが束縛変数か？

1. $(\lambda x. (yx))$
2. $(a(\lambda b. b))$
3. $((\lambda w. w)w)$
4. $(\lambda x. (\lambda y. ((xy)(zy))))$

一般にプログラミング言語で仮引数の名前は、他の変数とぶつからない限り、付け替えても良い。ラムダ記法でも同様であり、 $(\lambda x. (yx))$ と $(\lambda z. (yz))$ は同じものと見なされる。(このように変数の名前を付け替えることを _____ (_____) と呼ぶことがある。) ただし、 $(\lambda x. (yx))$ と $(\lambda y. (yy))$ は別物である。このように名前の衝突する α 変換は許されない。

QL3.2 以下のうち、 α 変換によって同等となるラムダ式を選べ。

1. $(\lambda x. (xy))$ と $(\lambda z. (zy))$
2. $(\lambda x. (\lambda y. (xy)))$ と $(\lambda y. (\lambda x. (yx)))$
3. $(\lambda x. (\lambda y. y))$ と $(\lambda z. (\lambda y. y))$
4. $(\lambda a. (\lambda b. b))$ と $(\lambda b. (\lambda a. b))$

置換

ラムダ式 M, N と変数 x があるとき、 $M[x := N]$ という記法を M の中の自由な x の出現をすべて N で置き換えて得られるラムダ式を表すものとする。(この $[_ := _]$ という記法自体はラムダ式の枠外の、“メタ”な記法である。)

例えば、 $(\lambda y. (xy))[x := (\lambda z. z)]$ は、 $(\lambda y. ((\lambda z. z)y))$ となるが、 $(\lambda y. (xy))[y := (\lambda z. z)]$ は、 $(\lambda y. (xy))$ のままである。 y は $(\lambda y. (xy))$ の中に自由に出現していないからである。

β 簡約

ラムダ計算の計算規則は、基本的に β 簡約 (β 変換、 β reduction) と呼ばれる変換規則のみである。直感的には、関数の仮引数を実引数で置き換える操作である。これは、ラムダ式の中の

$$((\lambda x. M)N)$$

という形をした部分式を

$$M[x := N]$$

に書き換える変換である。この書き換えが適用可能な部分式のことを β (redex) と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{例: } & (((\lambda f. (\lambda x. (f(fx))))(\lambda y. y))z) \xrightarrow{\beta} ((\lambda x. ((\lambda y. y)((\lambda y. y)x))z) \\ & \xrightarrow{\beta} ((\lambda y. y)((\lambda y. y)z)) \xrightarrow{\beta} ((\lambda y. y)z) \xrightarrow{\beta} z \end{aligned}$$

Q L.3.3 次のラムダ式を (1 ステップ) β 簡約せよ。

1. $((\lambda x. (xy))(\lambda z. (zy)))$
2. $((\lambda x. (\lambda y. x))(\lambda z. z))$
3. $((\lambda x. (xy))(\lambda w. w))$
4. $((\lambda y. (xy))(\lambda w. w))$

もっと面白い例として $((\lambda x. (xx))(\lambda x. (xx)))$ というラムダ式は、 β 簡約の結果、自分自身に戻る。ラムダ計算には通常のプログラミング言語にあるような繰り返し文や再帰がないが、それでも止まらない計算を表現することができるということがわかる。(あとで、止まる繰り返し表現できることも紹介する。)

これ以上 β 簡約を施すことができないラムダ式を β (normal form) という。 M から β 簡約を繰り返して、 N という正規形に到達するとき、 N を M の正規形と呼ぶ。上の例でわかるように正規形を持たないラムダ式というものも存在する。

L.4 ラムダ式の略記法

ここまで説明したラムダ式の文法は、計算規則の説明のためには、括弧をつけたり外したりする必要がなく都合がよい。ただ、このままだと、括弧が多くなりすぎるので、次のような略記法の約束を導入して、括弧の数を節約する。

1. $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n. M \equiv (\lambda x_1. (\lambda x_2. (\cdots (\lambda x_n. M) \cdots)))$ つまり、 λ 抽象が続く場合は λ を節約して1つだけ書く。
2. $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n \equiv ((\cdots ((M_1 M_2) M_3) \cdots) M_n)$ つまり、関数適用は左に結合する。

また、 λ 抽象よりも関数適用のほうが優先度が高い。つまり、 $\lambda xy. M_1 M_2 M_3$ は $(\lambda x. (\lambda y. ((M_1 M_2) M_3)))$ の略記となる。 $(\lambda x. M_1) M_2$ は括弧を省略してしまうと、 $\lambda x. M_1 M_2$ となってしまう、 $\lambda x. (M_1 M_2)$ と区別がつかなくなってしまうので、括弧は省略できない。

BNF で表現すると以下のようなになる。

$$M ::= F \mid \lambda W \mid \cdot M$$

$F ::= A \mid F A$
 $A ::= V \mid \text{"(" } M \text{"}$
 $W ::= V \mid V W$
 $V ::= \text{"x"} \mid \text{"y"} \mid \text{"z"} \mid \dots$

例:

例えば $\lambda fx. f(fx)$ は $(\lambda f. (\lambda x. (f(fx))))$ の略記であり、 $(\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ は $((\lambda x. (xx))(\lambda x. (xx)))$ の略記である。

また β 簡約などをするときには、略記法をいちど（頭の中で）正式な記法に戻して、 β 簡約し、再度略記法にする必要がある。

Q L.4.1 次のラムダ記法の正式記法を、できるだけ括弧を少なくした略記法に変換せよ。

1. $(\lambda x. (\lambda y. ((xy)(xy))))$
 2. $(\lambda x. (((\lambda y. x)(\lambda z. z))x))$
-
-

Q L.4.2 次のラムダ記法の略記法を正式記法に変換せよ。

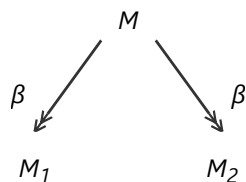
1. $\lambda x. (\lambda y. y)x$
 2. $\lambda xy. xxy$
-
-

L.5 ラムダ計算の性質

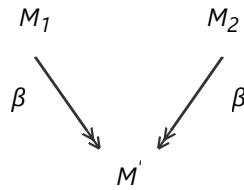
よく知られているラムダ計算の性質を証明なしで紹介する。

チャーチ・ロッサー (Church-Rosser) の定理

ひとつのラムダ式に幾通りもの β 簡約が可能なことがある。このとき、異なる β 簡約を行なうと、別の形に枝分かれしてしまう。



しかし、うまく何回か β 簡約するとこの枝分かれしたものを再び合流させることができる、



ということを述べている定理である。

これは同時に、あるラムダ式に正規形が存在するならば、それは一つしかない (α 変換による違いを除く) ということを保証している。

最左戦略

正規形が存在するラムダ式でも、下手に (上手に?) β 基を選んでいけば、いつまでも β 簡約をし続けることがありうる。しかし、最も左からはじまる β 基を選んで行けば、正規形の存在するラムダ式ならば、必ず正規形に到達することが可能である。

例 1: ラムダ式 $(\lambda xy. y)((\lambda x. xx)(\lambda x. xx))$ は、 $(\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ の部分を β 簡約していると、いつまでも正規形に到達しないが、最左 β 基を選ぶとすぐに正規形 $\lambda y. y$ になる。

ただし、最左戦略が正規形に到達するために最も効率の良い (つまり β 簡約の少ない) 方法とは限らない。(むしろ、そうでないことのほうが多い。)

例 2: ラムダ式 $(\lambda x. fxx)((\lambda yz. z)w)$ は、右側の β 基を選ぶと $(\lambda x. fxx)(\lambda z. z)$ になるが、最左 β 基を選ぶと $f((\lambda yz. z)w)((\lambda yz. z)w)$ になる。最終的にはどちらも $f(\lambda z. z)(\lambda z. z)$ になる。

Q L.5.1 以下のラムダ式を (1 ステップ) 最左簡約せよ。

1. $((\lambda x. ((\lambda y. x)x))(\lambda z. z))$
2. $((\lambda x. (xx))((\lambda y. y)z))$

L.6 おもしろいラムダ式

いろいろなデータの表現

純粋なラムダ計算には、整数などの組み込みのデータ型がないため、一見したところ意味のある計算ができるようには見えない。しかし、実際には真偽値・整数・組などのデータは純ラムダ計算の中で表現することができる。

真偽値 ラムダ式 $\lambda t f. t$, $\lambda t f. f$ をそれぞれ *true*, *false* と呼ぶことにする。また、 $\lambda cte. cte$ というラムダ式を *if* と呼ぶことにする。

$if\ true\ M_1\ M_2 \xrightarrow{\beta} M_1$ であり、 $if\ false\ M_1\ M_2 \xrightarrow{\beta} M_2$ である。

問 L.6.1 上記の β 簡約を 1 ステップずつ書いて確かめよ。つまり、

$if\ true\ M_1\ M_2 \equiv (\lambda cte.\ cte)\ true\ M_1\ M_2 \rightarrow (\lambda te.\ true\ t\ e)\ M_1\ M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_1$

であることを示せ。

チャーチの数 (Church numeral) ラムダ式 $\lambda fx.\ x, \lambda fx.\ fx, \lambda fx.\ f(fx), \dots$ を $0, 1, 2, \dots$ という整数に対応するという意味で、 c_0, c_1, c_2, \dots と呼ぶ。一般に c_n は

$$\lambda fx.\ \underbrace{f(f(\dots(fx)\dots))}_{n\text{個}}$$

というラムダ式である。ここで *plus* というラムダ式を次のように定義する。

$$\lambda mnfx.\ mf(nfx)$$

すると、 $plus\ c_m\ c_n \xrightarrow{\beta} c_{m+n}$ となる。

問 L.6.2 上記の β 簡約を、 $m = 3, n = 2$ などの具体例を用いて 1 ステップずつ書いて確かめよ。つまり、

$(\lambda mnfx.\ mf(nfx))(\lambda fx.\ f(f(fx)))(\lambda fx.\ f(fx)) \rightarrow \dots \rightarrow \lambda fx.\ f(f(f(f(fx))))$

となることを示せ。

引き算・かけ算などもやや難しくなるが定義することが可能である。

問 L.6.3 次の関数をチャーチの数に対するラムダ式として定義せよ。

1. *zero* — 0 であるかどうかを判定する述語
2. *mult* — かけ算
3. *pred* — 1 を引く関数 (難)
4. *sub* — 引き算 (*pred* を使えば簡単)

組 ここで *pair* を $\lambda fsd.\ dfs$ というラムダ式と定義する。また、*fst*, *snd* をそれぞれ、 $\lambda p.p(\lambda fs.\ f), \lambda p.p(\lambda fs.\ s)$ とする。 $fst\ (pair\ M_1\ M_2) \xrightarrow{\beta} M_1$ であり、 $snd\ (pair\ M_1\ M_2) \xrightarrow{\beta} M_2$ となる。

問 L.6.4 上記の β 簡約を 1 ステップずつ書いて確かめよ。

問 L.6.5 リストを表現するために、*cons*, *nil*, *isNull*, *head*, *tail* に対応するラムダ式を定義せよ。

Y コンビネーター

ラムダ式 $\lambda f. (\lambda x.\ f(xx))(\lambda x.\ f(xx))$ を *Y* と呼ぶ。

$YF \xrightarrow{\beta} (\lambda x.\ F(xx))(\lambda x.\ F(xx))$ であるが、この右辺を *U* と置くと、

$U \xrightarrow{\beta} FU \xrightarrow{\beta} F(FU) \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\beta} F(F(\dots(FU)\dots))$ となることがわかる。 *U*

は *F* の不動点と考えられるため、*Y* のことを不動点演算子 (fixed point operator) とも呼ぶ。このような *Y* は再帰関数を定義するのに用いることができる。

例えば、*fact* というラムダ式を次のように定義する。

$$Y\ (\lambda fx.\ if\ (zero\ x)\ c_1\ (mult\ x\ (f\ (pred\ x))))$$

これは、おなじみの階乗の関数を定義している。

問 L.6.6 上の $fact$ が階乗の関数を表現していることを、 c_3 などの具体的なチャーチ数を用いて、確かめよ。ただし $zero, mult, pred$ などのラムダ式はすでに定義されているものと仮定して良い。(つまり、 $pred\ c_3 \xrightarrow{\beta} c_2$ などは途中のステップを書かなくて良い。)

$$\begin{aligned} fact\ c_3 &\equiv Y(\lambda f x. if\ (zero\ x)\ c_1\ (mult\ x\ (f\ (pred\ x))))c_3 \\ &\xrightarrow{\beta} U\ c_3 \text{ ここで } F \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f x. if\ (zero\ x)\ c_1\ (mult\ x\ (f\ (pred\ x))) \\ &\quad U \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x. F(x x))(\lambda x. F(x x)) \\ &\xrightarrow{\beta} F\ U\ c_3 \\ &\xrightarrow{\beta} if\ (zero\ c_3)\ c_1\ (mult\ c_3\ (U\ (pred\ c_3))) \\ &\xrightarrow{\beta} \dots \end{aligned}$$

L.7 この章のまとめ

以上でラムダ計算が、単純な体系ながら、強力なプログラミング言語とみなすことができるということがわかる。少なくとも再帰と条件分岐などの制御構造、整数などのデータ型をラムダ計算の中で表現することが可能である。また、2つのラムダ式が等価であるという議論も比較的容易にできる(本当は、2つのラムダ式が等価であるという議論が簡単にできるのは、正規形が存在する場合だけである。正規形が存在しないラムダ式の場合には、互いに β 簡約できないのに、“同じ”としか考えられないラムダ式が存在する。これが、 D_∞ や P_ω などの領域 (domain) に関する理論が必要な理由である。))。

原理的には、より複雑なプログラミング言語の意味をラムダ式として表現することも可能である。しかしながら、実際にすべての計算を純粋なラムダ計算で記述すると、量が多くなりすぎてたいへんである。Haskell は、基本的にはラムダ計算に、いろいろな便利な構文 (構文上の糖衣) と高度な型システムを導入した (だけの) プログラミング言語である。

L.8 さらに詳しく知りたい人のために...

文献 (高橋 1991) は、ラムダ計算について丁寧に解説している。文献 (セシィ 1995) の 12 章にもラムダ計算の解説がある。

(高橋 1991) 高橋 正子 「計算論 — 計算可能性とラムダ計算」近代科学社, 1991年, ISBN4-7649-0184-6

(セシィ 1995) ラビ・セシィ (神林 靖 訳) 「プログラミング言語の概念と構造」アジソン・ウェスレイ, 1995 年, ISBN4-7952-9663-4

第5章 モナドと命令型言語の意味

この章では、命令型言語のさまざまな副作用に対して、モナドを利用してその意味を Haskell で与えることにする。Haskell で意味を与えるということは、等式による推論が可能になるということである。

前章で紹介した IO は効率のために Haskell の処理系で特別扱いされる組込みのモナドであるが、他の言語の副作用を模倣するためにユーザーが独自のモナドを定義することも可能である。モナドを用いる利点は、“計算”の意味が変わっても、モナドの標準的な関数 *return* と *(>>=)* のみを用いている部分は、変更する必要がないところである。

5.1 ミニ命令型言語 Util

この章で紹介する副作用をすべて備え持つ命令型言語は現実には存在しないので、説明のための独自のミニ命令型プログラミング言語を導入する。簡単な言語からはじめて様々な副作用を持つ言語を定義していく。状況に応じて C, Java などに加えて、このようなミニ命令型プログラミング言語のプログラムの意味を Haskell で説明する。

名前がないと不便なので、これらのミニ命令型言語を Util (**Util: Tiny Imperative Language**) (いわゆる再帰的頭字語 (recursive acronym) である。PHP, GNU などの略語の由来も参照すること。)と呼び、必要により UtilErr, UtilST, UtilCont, ... などのようにバージョンを表す接尾語をつけることにする。いろいろな副作用を導入していくにつれ、その“計算”を表すモナドの定義が変わることになる。

Util については、この章では、必要な事柄の説明だけにとどめて、補足の第 U 章で実装 (Util から Haskell へのコンパイラ) の詳細を紹介する。ただし、実装の詳細は把握しなくても、ソースプログラムとターゲットプログラムを比べれば、副作用を持つプログラミング言語がどのように変換されるか感覚的に掴めるはずである。

5.1.1 構文規則

Util の具体的な構文としては次のような BNF で定義されていると仮定する。(演算子の優先順位なども適切に宣言されているとする。)

```
Expr → Const | Var | ( Expr )
      | if Expr then Expr else Expr | while Expr do Expr
      | begin Exprs end
      | let Decls in Expr | val Binds in Expr
      | \ Vars -> Expr | Expr Expr
      | Expr + Expr | Expr * Expr | ... (他の中置演算子) ...
Exprs → Expr | Expr ; Exprs
Decl  → Vars = Expr
```

```

Decls → Decl | Decl ; Decls
Bind  → Var <- Expr
Binds → Bind | Bind ; Binds
Vars  → Var | Var Vars

```

ここに示されていないが、定数 *Const* と変数 *Var* の字句の定義は Haskell と同じとする。

Haskell と異なり **while** ~ **do** 式や **begin** ~ **end** 式があるところが命令型言語らしいところである。

5.1.2 抽象構文と具象構文

ところで、上の Util の構文規則は ambiguous (ambiguous) である。つまり $1 + 2 * 3$ は足し算と掛け算のどちらを先に実行するか、決定できない。通常は曖昧さを避けるために、

```

Expr  → Expr + Term | Term
Term  → Term * Factor | Factor
Factor → Const | ( Expr )

```

のように曖昧さを避けるために構文規則を工夫する。この後者のように実際に構文解析に用いるための構文を concrete syntax (concrete syntax) という。

それに対して、いったん構文解析が終了してしまえば、曖昧さを避けるための補助的な仕掛けは必要なくなり、本質的な構造のみを扱えばよい。そのため、前者のような構文規則で十分である。このように構成要素の本質的な関係を記述した構文のことを abstract syntax (abstract syntax) という。

この章で“構文”と呼んでいるのは、この抽象構文のことである。

5.1.3 Util から Haskell への翻訳

命令型言語である Util から Haskell への翻訳を考えることができる。補足第 U 章では、さらに詳しく Util から Haskell へのコンパイラの実装を紹介するが、ここでは対応表の形で説明する。

次の表のソース中で *Italic* フォントで示されている m, n などは任意の Util の式で、ターゲット中で $\llbracket m \rrbracket, \llbracket n \rrbracket$ のように $\llbracket \rrbracket$ が付いている式は、その変換後の Haskell の式を表す。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
<i>c</i> (ただし <i>c</i> は定数)	return c
<i>x</i> (ただし <i>x</i> は変数)	return x
val <i>x</i> <- <i>m</i> in <i>n</i>	$\llbracket m \rrbracket \gg= \backslash x \rightarrow \llbracket n \rrbracket$
let <i>f</i> = $\backslash x \rightarrow m$ <i>g</i> = $\backslash y \rightarrow n$ in <i>k</i>	let <i>f</i> = $\backslash x \rightarrow \llbracket m \rrbracket$ <i>g</i> = $\backslash y \rightarrow \llbracket n \rrbracket$ in $\llbracket k \rrbracket$
<i>f a</i>	$\llbracket f \rrbracket \gg= \backslash _g \rightarrow$ $\llbracket a \rrbracket \gg= \backslash _x \rightarrow$

	<code>_g _x</code>
<code>\ x -> m</code>	<code>return (\ x -> [m])</code>
<code>if c then t else e</code>	<code>[c] >>= \ _b -> if _b then [t] else [e]</code>
<code>while c do t</code>	<code>let _while = [c] >>= \ _b -> if _b then [t] >>= \ _ -> _while else return () in _while</code>
<code>begin s; t; u end</code>	<code>[s] >>= \ _ -> [t] >>= \ _ -> [u]</code>

この翻訳の要点は、変数や定数の出現など“副作用”が発生しないところには `return` がついた形に翻訳されること、関数適用や `begin ~ end` による逐次実行は (`>>=`) を使った式に翻訳されること、などである。

また、Util プログラム中の `+`, `-`, `*` などの (副作用を持たない) プリミティブな二項演算子は、他の関数が `return (\ x -> ...)` という形に変換されること、戻り値はアクションを持たないことから、同名の Haskell 内のオペレーターを用いて、それぞれ

```
return (\ x -> return (\ y -> return (x + y)))
return (\ x -> return (\ y -> return (x - y)))
return (\ x -> return (\ y -> return (x * y)))
```

という Haskell の式に置換するようしておくとの他の部分の変換と整合する。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
⊗ (ただし ⊗ は 副作用のない二項演算子)	<code>return (\ x -> return (\ y -> return (x ⊗ y)))</code>

この対応表を用いて、例えば次の Util プログラムを変換 (ただし、この `fact` 関数は副作用を含んでいないので、この変換自体にはあまり意味はない。) すると

```
1 fact n = if n == 0 then 1 else n * fact (n - 1)
```

次のような Haskell のプログラムが得られる。

```
1 fact = \ n ->
2   ((return (\ x -> return (\ y -> return (x == y))) >>=
3     \ _f -> return n >>= \ _x -> _f _x)
4     >>= \ _f -> return 0 >>= \ _x -> _f _x)
5     >>=
6     \ _b ->
7       if _b then return 1 else
8         (return (\ x ->
9           return (\ y -> return (x * y))) >>=
10          \ _f -> return n >>= \ _x -> _f _x)
11          >>=
12          \ _f ->
13            (return fact >>=
```

```

14     \ _f ->
15         ((return (\ x ->
16             return (\ y -> return (x - y)))
17             >>= \ _f -> return n
18             >>= \ _x -> _f _x)
19             >>= \ _f -> return 1
20             >>= \ _x -> _f _x)
21     >>= \ _x -> _f _x
22

```

これは多くの冗長な部分を含んでいるので、前述の monad law などを利用して単純化すると、多くの return や (>>=) が消えて、次のような Haskell の式が得られる。

```

1 fact = \ n -> if n == 0 then return 1 else
2           fact (n - 1) >>= \ _x ->
3           return (n * _x)

```

5.2 トリビアルなバージョン — Util1

最初のバージョン Util1 では、モナドはトリビアルな計算（何もしない計算）としておく。つまり、Util1 は副作用を持たない言語である。

ファイル `ld.hs`

```

1 newtype I a = I a
2
3 instance Monad I where
4     return a = I a
5     (I m) >>= k = k m

```

ここで、`I` は、Haskell の新しい型の宣言の形式の一つである。data 宣言と似ているが、フィールドが一つの構成子を持つことができない。また data 宣言の構成子と異なり、newtype 宣言で導入される構成子は型変換の意味しか持たず、実行時の計算を伴わない。また、型の別名を宣言する type 宣言との違いは、型の変換が構成子によって明示的になる点である。（型クラスのインスタンスには、type 宣言で導入された型の別名は指定できない。例えばリストに通常の辞書式順序と異なる順序 (Ord のインスタンス宣言) を与えたいときは newtype を使って別名を用意し、別名に対してインスタンス宣言する必要がある)

上記の newtype 宣言では型構成子と構成子に同じ `I` という名前を使っているが、文脈でどちらか判断することができるので問題ない。

なお、ある型構成子を Monad のインスタンスと宣言するとき、同時に Monad のスーパークラスである Functor と Applicative に対してもインスタンス宣言をする必要がある。今後紹介するモナドに対してもすべて同一なので `I` に対するインスタンス宣言だけを代表として紹介しておく。

ファイル `ld.hs`

```

1 instance Functor I where
2   fmap f m = m >>= \ x -> return (f x)
3
4 instance Applicative I where
5   pure = return
6   g <*> m = g >>= \ f -> m >>= \ x -> return (f x)

```

このとき、

```

1 fact n = if n == 0 then 1 else n * fact (n - 1)

```

という Util プログラムを Haskell に翻訳して実行する `unI (fact 9)` と、同じプログラムを Haskell として実行したときと全く同じ 362880 という値になる。これは何の意味もないように思えるが、副作用がなければ、Util と Haskell は意味が変わらないという確認にはなる。

ただし、`unI` は次のように定義された型変換関数である。

ファイル `Id.hs`

```

1 unI :: I a -> a
2 unI (I a) = a

```

5.3 UtilST — 状態の導入

Util に更新（破壊的代入）可能な状態の概念を導入する。ここで紹介する例では、2 だけ代入可能な参照 (reference) x_P と y_P を導入することにする。2 という数は別に本質的なものではなく、いくつにすることも可能である。参照は `:=` 演算子で値を代入し、`get` で値を取り出すことができる。

例えば、

```

1 begin xP := 1; xP := get xP + 3; get xP end

```

という UtilST プログラムを評価すると、`3` という結果が得られる。

参考: なお、Util に代入可能な変数をそれ以外の変数と区別するような宣言（例えば Kotlin の `var` と `val`）を導入したり、変数名のカテゴリーを区別（例えば、特定の文字セットから始まる変数名を代入可能な変数に割り当てる）したりすれば、`get` の適用を省略して、

```

1 begin μ := 1; μ := μ + 3; μ end

```

のように書くことができるように言語仕様を変更することも可能である。こうすれば、C 言語により近い記法でプログラムを記述することも可能である。以下では、 μ , ν のようにギリシア文字を使った変数は、代入可能な参照を指す変数として宣言されていると仮定する。しかし `get` を使う書き方にも、副作用が存在している箇所が明確になると利点がある。

状態を導入するために、やはり "計算の型" を定義する必要がある。まず 次の ST という型構成子を定義する。

ファイル `ST.hs`

```
1 newtype ST s a = ST (s -> (a,s))
2
3 unST :: ST s a -> s -> (a,s)
4 unST (ST s) = s
5
6 instance Monad (ST s) where
7   return a      = ST ( \ s -> (a,s) )
8   (ST m) >>= k = ST ( \ s0 -> let { (a,s1) = m s0 }
9                               in unST (k a) s1 )
10  -- ST, unST がなければ、次のようになる
11  -- m >>= k = \ s0 -> let (a,s1) = m s0 in k a s1
```

この型構成子は `(ST s)` という形で `s` というパラメーター付きのモナドになる。このモナドは State Transformer モナドと呼ばれる。 `return a` は状態 (`s`) の変更を行わず、`a` をそのまま返す計算である。このモナドの `m >>= k` は、`m` で変更された状態 (`s1`) をそのまま、`k` に受渡す計算である。

問 5.3.1 ST に対して、次の monad law が成り立つことを確認せよ。

$$\begin{aligned} & (\text{return } a) \gg= k = k \ a \\ m \gg= (\ \ a \ \rightarrow \ \text{return } a) &= m \\ (m1 \gg= k1) \gg k2 &= m1 \gg= (\ \ a \ \rightarrow (k1 \ a \ \gg= k2)) \end{aligned}$$

参照は次のように定義する。

ファイル `MyState.hs`

```
1 type Pos s a = s -> (a, a -> s)
2
3 xP :: Pos (x,y) x
4 xP = \ (x,y) -> (x, \ x1 -> (x1,y))
5
6 yP :: Pos (x,y) y
7 yP = \ (x,y) -> (y, \ y1 -> (x,y1))
```

`Pos s a` は `s` という全体の状態の型の中で、`a` という型を指している参照の型である。ここで `xP` と `yP` は、それぞれペアの第1、第2成分にアクセスするための参照である。参照に対する読み出し・書き込みのメソッドは、後で別のモナドでも使用するので、型クラス `MyState` のメソッドとして定義しておくことにする。

ファイル `MyState.hs`

```
1 class MyState m where
2   get  :: Pos s a -> m s a
3   set  :: Pos s a -> a -> m s ()
```

そして ST をこの MyState クラスのインスタンスとして宣言する。

ファイル `ST.hs`


```

1 instance MyState ST where
2   get p   = ST (\ s -> (fst (p s), s))
3   set p v = ST (\ s -> ((), snd (p s) v))
4
5 -- 例えば get xP ≡ ST (\ (x,y) -> (x, (x,y)))
6 --          set xP x1 ≡ ST (\ (x,y) -> ((), (x1,y)))

```

ここで `set` は参照先の状態を書き換える、また `get` は参照先の値を複製する関数である。

また、最終的に `ST` から値を取り出すために

```

1 evalST :: ST s a -> s -> a
2 evalST st s = fst (unST st s)

```

という関数を定義しておく。第2引数の `s` は初期状態である。

Q 5.3.2 次のように `ST` を使った関数 `foo`, `bar` を定義する。

```

1 import ST
2 import MyState
3
4 foo b y = do set xP 1
5              set yP y
6              let repeat =
7                  do y1 <- get yP
8                     if y1 > 0 then do
9                         x1 <- get xP
10                        set xP (x1 * b)
11                        set yP (y1 - 1)
12                        repeat
13                    else return ()
14              in repeat
15              get xP
16
17 bar n = do set xP 1
18            set yP 1
19            let repeat =
20                do x1 <- get xP
21                   if x1 < n then do
22                       y1 <- get yP
23                       let y2 = y1 + 1
24                           set yP y2
25                           set xP (x1 * y2)
26                       repeat
27                   else return ()
28            in repeat
29            get yP

```

これらの関数に対して、

1. `evalST (foo 3 4) (0,0)`

2. `evalST (bar 50) (0,0)`

の値を、まず実行する前に予想し、次に実際に実行して確認せよ。

UtilST の := 演算子と get 関数は、Haskell の set, get にそれぞれコンパイルされるようにしておく。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
<code>p := m</code>	<code>[[p]] >>= \ _p -> [[m]] >>= \ _x -> set _p _x</code>
<code>get p</code>	<code>[[p]] >>= \ _p -> get _p</code>

左の UtilST プログラム (右は対応する C プログラム) :

<pre> 1 fact n = begin 2 xP := 1; yP := n; 3 while get yP > 0 do 4 begin 5 xP := get xP * get yP; 6 yP := get yP - 1 7 end; 8 get xP 9 end </pre>	<pre> 1 int fact(int y) { 2 int x = 1; 3 while (y > 0) { 4 x = x * y; 5 y = y - 1; 6 } 7 return x; 8 } 9 </pre>
--	--

参考: 次は get を省略する書き方にして、さらに C に近付けた UtilST プログラムである。

<pre> 1 fact n = begin 2 μ := 1; ν := n; 3 while ν > 0 do begin 4 μ := μ * ν; 5 ν := ν - 1 6 end; 7 μ 8 end </pre>

を翻訳すると次のような Haskell の関数になる。

<pre> 1 fact n = set xP 1 >>= \ _ -> 2 set yP n >>= \ _ -> 3 (let _while = get yP >>= \ y -> 4 if y > 0 then 5 get xP >>= \ x -> 6 get yP >>= \ y -> 7 set xP (x * y) >>= \ _ -> 8 get yP >>= \ y -> 9 set yP (y - 1) >>= \ _ -> 10 _while 11 else return () 12 in _while) >>= \ _ -> 13 get xP </pre>

この翻訳した fact に対して fact 9 を実行する `evalST (fact 9) (0,0)` と、その結果は 362880 になる。

階乗の場合、普通に関数的な定義のほうが簡潔だが、パラメーターの数が多い場合などは、このような命令的な書き方が簡潔になる場合も考えられる。

この ST の定義では、エラー処理を考慮していない。エラー処理を行なうためには、この ST と（後述する）Maybe の定義を合成する必要がある。参考までに、次のようなモナドになる。

ファイル `EST.hs`

```
1 newtype EST s a = EST (s -> Maybe (a,s))
2
3 unEST :: EST s a -> s -> Maybe (a,s)
4 unEST (EST m) = m
5
6 instance Monad (EST s) where
7   return a = EST (\ s -> return (a,s))
8   (EST m) >>= k = EST (\ s0 ->
9     case m s0 of
10      Just (a,s1) -> unEST (k a) s1
11      Nothing     -> Nothing)
```

問 5.3.3 次の C の関数とほぼ同等な UtilST の関数、または、ST モナドを用いた Haskell の関数を定義せよ。

```
1. 1 int foo(int n) {
2     int i = 1, j = 1;
3     while (i < n) {
4         i = i + j;
5         j = i - j;
6     }
7     return i;
8 }

2. 1 int bar(int n) {
2     int i = 0;
3     while (n > 1) {
4         i = i + 1;
5         n = n / 2;
6     }
7     return i;
8 }
```

※ 整数の割り算は Haskell では `div` 演算子になる。

5.4 (参考) UtilIO — 入出力の導入

入出力は、入出力ストリームを状態の一種と考えれば、前節の UtilST と同じ方法で取り扱うことができる。

計算のモナドの定義は前節と基本的に同じだが、状態に入力と出力のストリームを表す String 型の部分を追加しておく。

ファイル `MyStream.hs`

```
1 type WithIO s = (s, String, String)
```

第 2 要素が入力ストリーム、第 3 要素が出力ストリームを表す部分である。

ファイル `MyIO.hs`

```
1 newtype MyIO s a = MyIO (WithIO s -> (a, WithIO s))
2
3 unMyIO :: MyIO s a -> WithIO s -> (a, WithIO s)
4 unMyIO (MyIO m) = m
```

参照のプリミティブの定義は次のようになる。

ファイル `MyIO.hs`

```
1 instance MyState MyIO
2   get p   = MyIO (\ (s,i,o) -> (fst (p s), (s,i,o)))
3   set p v = MyIO (\ (s,i,o) -> ((), (snd (p s) v,i,o)))
```

入出力に関するプリミティブも後で別のモナドで使用するの、型クラス `MyStream` のメソッドとして定義しておく。

ファイル `MyStream.hs`

```
1 class MyStream m where
2   readChar  :: m Char
3   eof       :: m Bool
4   writeStr  :: String -> m ()
```

ファイル `MyIO.hs`

```
1 instance MyStream (MyIO s) where
2   readChar  = MyIO (\ (s,c:cs,o) -> (c, (s,cs,o)))
3   eof       = MyIO (\ (s,i,o) -> (null i, (s,i,o)))
4   writeStr v = MyIO (\ (s,i,o) -> ((), (s,i,o ++ v)))
```

ここで `readChar` は入力ストリームから1文字を取出す。また `writeStr str` は出力ストリーム `o` に `str` を追加する (ただし「++」の計算量は左オペランドの長さに比例するので、この定義のように文字列の後ろに新しい文字列を追加 (++) していくと、出力文字列が長くなるにしたがって効率が悪くなる。これを避けて効率の良い定義を与えることも可能であるが、ここでは簡単のために「++」を使った定義を採用する。)。そして `write` という関数を次のように定義しておく。

ファイル `MyStream.hs`

```
1 write :: (Show v, MyStream m) => v -> m ()
2 write v = writeStr (show v)
```

すると、次の `UtilIO` プログラム (ただし、「//」は整数の除算を表す演算子とする。)

```
1 foo n = begin
2   xP := n;
3   while get xP > 0 do begin
4     write (get xP % 10);
5     xP := get xP // 10
6   end
7 end
```

を Haskell に翻訳した結果は、

```
1 foo n = set xP n >>= \ _ ->
2     let _while
3         = get xP >>= \ _x ->
4             if _x > 0 then
5                 get xP >>= \ _x ->
6                     write (_x `mod` 10) >>= \ _ ->
7                         get xP >>= \ _x ->
8                             set xP (_x `div` 10) >>= \ _ ->
9                                 _while
10                            else return ()
11     in _while
```

となり、補助関数 evalMyIO を以下のように定義したとき、

```
1 evalMyIO e s =
2     let (_, (_, _, o)) = unMyIO e (s, "", "") in o
```

関数 foo を `evalMyIO (foo 12345) (0,0)` のように実行すると、出力は "54321" になる。

問 5.4.1 次の C の関数とほぼ同等な UtilIO の関数、または、MyIO モナドを用いた Haskell の関数を定義せよ。

```
1. 1 int baz(int n) {
2     int i, j;
3     for (i = 0; i < n; i++) {
4         for (j = 0; j <= i; j++) {
5             printf("*");
6         }
7         printf("\n");
8     }
9     return i;
10 }

2. 1 int qux(int n) {
2     int i, j;
3     for (i = 0; i < n; i++) {
4         printf("*");
5         if (i % 3 == 0) {
6             printf("!");
7         }
8         printf("\n");
9     }
10    return i;
11 }
```

5.5 UtilErr — エラー処理の導入

次に Util にエラー処理を導入する。UtilErr は、生真面目に (?) エラー処理を行ない、部分式にエラーがあれば式全体もエラーになるようにする。この場合、UtilErr は (Haskell のような) 遅延評価ではなくて、関数の引数を必ず先に評価する (eager evaluation) を模倣することに注意する必要がある。

エラーと正常な振舞いを区別するために、次のような標準ライブラリーに用意されているデータ型 Maybe を使用する。

```
1 -- Preludeに定義済み
2 data Maybe a =  |  deriving (Show,Eq)
```

正常な振舞いは Just という構成子で表す。エラーの場合は Nothing という構成子を用いる。この型に対して次のようなインスタンス宣言がされている。

```
1 -- Preludeに宣言済み
2 instance Monad Maybe where
3   return a = Just a
4   (Just a) >>= k = 
5   Nothing >>= k = 
```

このモナドの $m \gg= k$ は、まず m を計算し、その計算が正常終了すれば、その値を k という関数に渡す。しかし、いったん m でエラーが起こると、 k は評価されず、 していくことを表している。

問 5.5.1 Maybe に対して、次の monad law が成り立つことを確認せよ。

$$\begin{aligned} & (\text{return } a) \gg= k = k \ a \\ m \gg= (\backslash a \rightarrow \text{return } a) &= m \\ (m1 \gg= k1) \gg k2 &= m1 \gg= (\backslash a \rightarrow (k1 \ a \gg= k2)) \end{aligned}$$

さらに、MonadPlus というクラスに属するいくつかのメソッドを用意する。ここで mzero は 状況をつくり出すときに用いる。

Maybe に対する mplus は第 1 引数を評価し、 第 2 引数を評価する関数である。

```
1 -- モジュール Control.Monad に定義済み
2 class Monad m => MonadPlus m where
3   mzero :: m a
4   mplus :: m a -> m a -> m a
5
6 -- モジュール Control.Monad に宣言済み
7 instance MonadPlus Maybe where
8   mzero = Nothing
9   Just a `mplus` _ = Just a
10  Nothing `mplus` m = m
```

Q 5.5.2 次のように Maybe を使った関数 foo, bar を定義する。

```
1 import Control.Monad
2
3 mydiv :: Double -> Double -> Maybe Double
4 x `mydiv` y = if y == 0 then mzero else return (x / y)
5
6 foo :: Double -> Maybe Double
7 foo n = do x <- 6 `mydiv` n
8         return (x * 2)
9
10 bar :: Double -> Double -> Maybe Double
11 bar m n = do x <- (4 `mydiv` m) `mplus` (return 3)
```

```
12 x `mydiv` n
13
```

これらの関数に対して、(1) `foo 2` (2) `foo 0` (3) `bar 0 4` (4) `bar 1 0` の値を、まず実行する前に予想し、次に実際に実行して確認せよ。

いわゆるプリミティブ関数もエラー処理を利用するように書き換えることができる。例えば、`UtilErr` の割り算 (`/`) は、0 で割るとエラーなので、次のような Haskell の式に置換されるようにする。

```
\ x -> return (\ y -> if y == 0 then mzero
                    else return (x / y))
```

これで0で割ろうとした場合にはエラーが報告される。

例えば

```
1 (\ x -> 999) (1 / 0)
```

のような式は、Haskell だと解釈すると、`1 / 0` の部分式は _____ に全体の結果が 999 となるが、`UtilErr` だと解釈すると、次のような Haskell プログラムに翻訳され、

```
1 (if 0 == 0 then mzero
2   else return (1 / 0)) >>= \ _x ->
3 return 999
```

実行すると (エラーが起こったことを表す) _____ という結果になる。

5.6 例外処理の導入

例外のモナド `Maybe` を利用して、Java の `try ~ catch` のように例外を捕捉する構文を導入することも可能である。

`Util` の BNF には以下の構文を追加する。

```
Expr → ... | try Expr catch Expr
```

"`try m catch n`" は `m` を評価し、エラーがなかった場合は、その戻り値を `try` 式の戻り値とする。しかし `m` の評価中にエラーが生じた場合は、`n` を評価する。`Util` の "`try m catch n`" は "`m `mplus` n`" という式として構文解析されるようにしておく。

また、`fail` という `Util` の関数は、Haskell の `mzero` を返す関数にコンパイルされるようにしておく。この関数は、Java の `throw` 文に対応する。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
<code>try m catch n</code>	<code>[m] `mplus` [n]</code>
<code>fail ()</code>	<code>mzero</code>

例えば

```
1 bar n = try 1 / n catch 99999
```

という UtilErr プログラムをコンパイルすれば、出力される Haskell プログラムは、

```
1 bar n = (if n == 0 then mzero else return (1 / n))
2         `mplus` (return 99999)
```

であり、bar 0 の結果は Just 99999.0 である。

5.7 UtilNonDet — 非決定性の導入

ここからは対象言語 Util に非決定性を導入する。非決定性 (nondeterminism) とはプログラムの動作に _____ が存在することを言う。ある選択肢を選んだ結果、計算が失敗する場合がある、その場合は前の選択肢に戻って計算をやり直す (バックトラック)。非決定性は探索型のパズル・ゲームや構文解析プログラムなどで利用できる。バックトラックをプリミティブな機能として提供する言語としては、論理型言語の _____ が有名である。

非決定性の“計算”のモナドは通常のリストを使用する。

```
1 -- Prelude で宣言済み
2 instance Monad [] where
3   return a = [a]
4   []      >>= k = []
5   (x:xs) >>= k = k x ++ (xs >>= k)
6
7 -- モジュール Control.Monad で宣言済み
8 instance MonadPlus [] where
9   mzero = []
10  mplus = (++)
```

このモナドは複数の選択肢を単にリストとして表現している。要するに、失敗は空リスト [] と表し、“ふつう”の成功は、シングルトン (要素数 1 のリスト) で表している。やり直しを ++ で表している。つまり、Maybe のときと違って、将来ダメだったときの選択を残している。

問 5.7.1 [] に対して、次の monad law が成り立つことを確認せよ。

$$\begin{aligned} & (\text{return } a) \gg= k = k \ a \\ m \gg= (\backslash a \rightarrow \text{return } a) &= m \\ (m1 \gg= k1) \gg k2 &= m1 \gg= (\backslash a \rightarrow (k1 \ a \gg= k2)) \end{aligned}$$

実はリストに対する return と (>>=) は、リストの内包表記を説明するときに使った `unit :: a -> [a]` と `bind :: [a] -> (a -> [b]) -> [b]` と全く同一の関数である。

計算の失敗は空リストで表される。

UtilNonDet は、構文は UtilErr と同じである。つまり、以下の構文を持つ。

```
Expr → ... | try Expr catch Expr
```


UtilNonDet の `try m catch h` は、`m` を評価し、`h` は“バックトラック”が起こったときに評価される。

UtilNonDet プログラム

```
1 test0 = (try 2 catch 3) * (try 5 catch 7)
```

をコンパイルすると、次の Haskell プログラムが得られる。

```
1 test0 = (return 2 `mplus` return 3) >>= \ x ->
2         (return 5 `mplus` return 7) >>= \ y ->
3         return (x * y)
```

この、`test0` は `[x * y | x <- [2,3], y <- [5,7]`] というリスト内包表記と同じ意味になる。そして `test0` は、`[10,14,15,21]` となる。

また、次の UtilNonDet プログラム

```
1 test1 n = (try 1 catch 2) / (try n catch 4)
```

を翻訳すると、次の Haskell プログラムが得られる。

```
1 test1 n = (return 1 `mplus` return 2) >>= \ x ->
2           (return n `mplus` return 4) >>= \ y ->
3           if y == 0 then mzero else return (x / y)
```

そして `test1 2` は、`[0.5,0.25,1.0,0.5]`、`test1 0` は `[0.25,0.5]` となる。失敗している計算については結果に現れていないことに注意する。同じプログラムを UtilErr で翻訳すると、UtilErr ではバックトラックが起こらないので、`test1 0` は全体が失敗 (Nothing) に終わる。

なお、次の `head` を用いてリストの頭部を取ることで、成功した最初の計算だけを返すことも可能である。

```
1 -- Prelude に定義済み
2 head :: [a] -> a
3 head (x:_) = x
```

このとき `head (test1 0)` の値は `0.25` となる。この場合、Haskell が を採用しているため、他の選択肢の計算は行なわれない。そのため選択肢が無限個あるような場合でも最初の選択肢の計算結果を出力することができる。

8 クイーンの問題も非決定性を用いて記述することができる。

```
1 safe1 xs n m = null xs ||
2                 val y <- head xs;
3                 ys <- tail xs in
4                 y /= n && y /= n + m && y /= n - m
5                 && safe1 ys n (m + 1);
6
7 safe xs n = safe1 xs n 1;
8
9 range i j = if i > j then fail ()
```

```

10         else try i catch range (i + 1) j;
11
12 queen n = if n == 0 then []
13           else val p <- queen (n - 1);
14                 n <- range 1 8 in
15                 if safe p n then (n:p) else fail ()

```

そして `queen 8` は、`[4,2,7,3,6,8,5,1]` から始まる 92 個の解を返す。

問 5.7.2 非決定性と状態の両方の特徴を持つ計算の型として、

```

1 newtype STL s a = STL (s -> ([a],s))
2 newtype LST s a = LST (s -> [(a,s)])

```

の 2 つのバリエーションが考えられる。このそれぞれに対して、コンパイラ
の定義を完成させ、2 つの違いを説明せよ。

5.8 Prolog と論理変数

論理型言語の Prolog には非決定性の他に、_____ という特徴がある。論理
変数 (logical variable) とは、最初は値が定まっておらず、単一化の制約により
徐々に値が具体化していく変数である。何度も代入できる命令型言語の変数と
も、一度初期化すれば二度と代入ができない関数型言語の変数とも異なる。
Haskell では論理変数自体は、破壊的代入を模倣するために使った State
Transformer モナドと同様の方法で模倣することができる。

例えば、Prolog では、リストを接続 (append) するプログラムは次のように記述
される。

```

1 myAppend([H|X], Y, [H|Z]) :- myAppend(X, Y, Z).
2 myAppend([], Y, Y).

```

これは、1 番目の引数と 2 番目の引数を接続した結果が 3 番目の引数になる、
という関係を表している。

この `myAppend` に対して、`[1,4,3]` と `[5,3]` の接続を求めるには、次のよう
な問合せ (呼出し) をする。

```

1 - myAppend([1,4,3], [2,5], R).
2
3 R = [1,4,3,2,5] ;
4
5 No

```

さらに Prolog のおもしろいところは `myAppend` の逆向きの計算もできるという
ことである。

```

1 ?- myAppend(A, B, [1,2,3]).
2
3 A = []
4 B = [1,2,3] ;
5
6 A = [1]
7 B = [2,3] ;

```

```

8
9 A = [1,2]
10 B = [3];
11
12 A = [1,2,3]
13 B = [] ;
14
15 No

```

この実行例では接続して `[1,2,3]` になる2つのリストの、すべての可能性を求めていることになる。ユーザーが「;」を入力するたびにバックトラッキングが起り別解を表示する。

MicroKanren.hs (<https://github.com/rntz/ukanren>) は、 μ Kanren という論理プログラミングのための埋め込み言語 (embedded language) を実装するための Haskell のライブラリーである。 μ Kanren は miniKanren という言語のミニマルな実装である。このライブラリーでは、非決定性と論理変数にプラスアルファの機能を加えたモナドが定義されている。ここで詳細な説明には立ち入らないが、このモナドは State Transformer と非決定性を組み合わせたものである。このライブラリーを使えば、上の Prolog の `myAppend` プログラムに相当するプログラムを Haskell で次のように記述できる。

```

1 myAppend a b ab =
2     do { h <- fresh; t <- fresh; res <- fresh;
3         ht <- cons h t; ht === a;
4         hres <- cons h res; hres === ab;
5         myAppend t b res }
6     `mplus`
7     do { n <- nil; n === a; b === ab }

```

ここで、`fresh` は新しい論理変数を生成する関数であり、「===」は両辺が単一化されることを示す演算子である。

ちなみに、Util の文法では次のように書くことができる。

```

1 myAppend a b ab =
2     try val h = fresh() in val t = fresh() ;
3         res = fresh() in
4         begin
5             cons h t === a; cons h res === ab;
6             myAppend t b res
7         end
8     catch begin nil() === a; b === ab end

```

この `myAppend` に対して次のようなプログラムを実行する。ただし、`toLVList` は通常のリストの型から論理変数を含むリストの型への変換、`fromLVList` はその逆である。ただし `fromLVList c xs` は `xs` のなかの未定の論理変数を `c` に置き換えた通常のリストを返す。

```

1 exampleAppend a =
2     val xs = fresh();
3     ys = fresh();
4     zs = toLVList [1,2,3] in begin
5         myAppend xs ys zs;

```

```
6 (fromLVList 0 xs, fromLVList 0 ys)
7 end
```

その結果は `[([], [1, 2, 3]), ([1], [2, 3]), ([1, 2], [3]), ([1, 2, 3], [])]` になる。

5.9 さらに詳しく知りたい人のために...

Parsec (Leijen & Meijer 2001) はモナドを利用した有名なパーサーライブラリーである。(Wadler 1992a) はモナドを用いてインタプリタを構築する方法を解説している。(Wadler 1992b) にも、モナドを用いてパーサーを構築する技法の解説がある。(Hinze 1998) は、Prolog のカット等のオペレーターの意味を整理している。(Kiselyov et al. 2005) は、miniKanren を Haskell で実装するためのモナドの解説である。

(Leijen & Meijer 2001) Daan Leijen and Erik Meijer, "Parsec: Direct Style Monadic Parser Combinators for the Real World"
Technical Report UU-CS-2001-35, Dept. of Comp. Sci, Universiteit Utrecht, 2001 年, <http://www.cs.uu.nl/people/daan/parsec.html>

(Wadler 1992a) Philip Wadler, "The essence of functional programming"
19th Annual Symposium on Principles of Programming Languages (invited talk), 1992 年 1 月

(Wadler 1992b) Philip Wadler, "Monads for functional programming"
Program Design Calculi, Proceedings of the Marktoberdorf Summer School, 1992 年 7-8 月

(Hinze 1998) Ralf Hinze, "Prological Features in a Functional Setting
Axioms and Implementations"
Third Fuji International Symposium on Functional and Logic Programming, 1998 年

(Kiselyov et al. 2005) Oleg Kiselyov, Chung-chieh Shan, Daniel P. Friedman and Amr Sabry, "Backtracking, interleaving, and terminating monad transformers (functional pearl)"
ACM SIGPLAN Notices (Vol. 40, No. 9, pp. 192-203), ACM, 2005 年 9 月

第U章 ちっちゃな命令型言語 Util

U.1 Util コンパイラー

この節では、Util コンパイラーの実装を紹介していく。

実際のコンパイラーにはフロントエンド、つまり や が
必要である。字句解析や構文解析の原理は Haskell でも C 言語などの命令型言語
で記述するときと変わりはない。再帰下降構文解析法、あるいは LR 構文解析法
などの方法を利用する。再帰下降法で構文解析部を記述するときには、後述の
ようにモナドを利用することができる。

しかし、ここではこれらフロントエンドの作り方は既知のものとして、構文木
ができた状態から話をはじめることにする。

Util の構文木のデータ構造として、次のような Haskell のデータ型を使用する。

ファイル RecType.hs

```
1 type Decl = (String, Expr)
2 data Expr = Const Target      -- 定数 (Target は後述)
3           | Var String        -- 変数
4           | If Expr Expr Expr -- if 文
5           | While Expr Expr   -- while 文
6           | Begin [Expr]      -- ブロック
7           | Let [Decl] Expr   -- let 式 (関数定義)
8           | Val Decl Expr     -- val 式 (変数定義)
9           | Lambda String Expr -- ラムダ式
10          | Delay Expr        -- delay 式 (後述)
11          | App Expr Expr     -- 関数適用
12          deriving Show
```

つまり、式 (Expr) とは、定数 (Const) または、変数 (Var) または、**if** 式
(If)、**let** 式 (Let)、ラムダ式 (Lambda)、関数適用 (App) などからなる。(あ
とから必要に応じて構文要素を追加することにする。)

データ型 Expr の定義は、Util の抽象構文を代数的データ型として直訳したもの
である。

U.1.1 字句解析・構文解析関数

次のような関数が既に定義されているものと仮定する。

```
myParse :: String -> Expr    -- 字句解析・構文解析の関数
```

- “`val x <- 2 * 2 in val y <- x * x in y * y`” というソースプログラムは `Expr` 型のデータとして次のように構文解析される。

```
Val ("x", (App (App times (Const (TLit (Int 2))))
              (Const (TLit (Int 2))))
      (Val ("y", (App (App times (Var "x")) (Var "x")))
        (App (App times (Var "y")) (Var "y"))))
```

ただし、`times` は `*` に対応する `Expr` の式である。

- “`\ f x -> f x`” という式は、

```
Lambda "f" (Lambda "x" (App (Var "f") (Var "x")))
```

というデータに構文解析される。

- 「`&&`」, 「`||`」 は、それぞれ、

```
b1 && b2 ⇨ if b1 then b2 else False
```

```
b1 || b2 ⇨ if b1 then True else b2
```

という糖衣構文であるように構文解析されるようにしておく。

U.1.2 ターゲット言語

コンパイラのターゲット言語である Haskell のサブセットの構文木を表現する型 `Target` 型を定義しておく。

ファイル `Target.hs`

```
1 type TDecl = (String, Target)
2 data Target = TLit Literal           -- 定数
3             | TVar String           -- 変数
4             | TIf Target Target Target -- if 文
5             | TLet [TDecl] Target   -- let 文
6             | TLambdaL String Target -- ラムダ式
7             | TAppL Target Target   -- 関数適用
8             | TReturn Target        -- return に相当
9             | TBind Target Target   -- (>>=) に相当
10            deriving (Show,Eq)
11 data Literal = Str String | Int Integer
12             | Frac Rational | Char Char
13            deriving (Show,Eq)
```

Util のコンパイラとは次のような型を持つ関数である。

```
comp :: Expr -> Target -- コンパイラ
```

U.1.3 コンパイラの定義

関数 `comp` の定義は次のようになる。個々の構文要素に対する定義は比較的素直である。

ファイル `RecCompiler.hs`

```

1 comp :: Expr -> Target
2 comp (Const c)           = TReturn c
3 comp (Var x)             = TReturn (TVar x)
4 comp (Val (x, m) n)      = comp m `TBind` TLambda1 x
5                           (comp n)
6 comp (Let decls n)       = TLet (map (\ (x, m) ->
7                               let TReturn c = comp m
8                                   in (PVar x, c)) decls)
9                               (comp n)
10 comp (App f x)           = comp f `TBind` TLambda1 "_f"
11                           (comp x `TBind` TLambda1 "_x"
12                               (TApp1 (TVar "_f") (TVar "_x")))
13 comp (Lambda x m)        = TReturn (TLambda1 x (comp m))
14 comp (Delay m)           = TReturn (comp m)
15 comp (If e1 e2 e3)       = comp e1 `TBind` TLambda1 "_b"
16                           (TIf (TVar "_b")
17                               (comp e2) (comp e3))
18 comp (While e1 e2)       = TLet [(PVar "_while", body)]
19                               (TVar "_while")
20   where body = comp e1 `TBind` TLambda1 "_b"
21               (TIf (TVar "_b")
22                   (comp e2 `TBind` TLambda1
23                       (TVar "_while")))
24               (TReturn (TVar "()"))
25 comp (Begin [e])         = comp e
26 comp (Begin (e:es))     = comp e `TBind` TLambda1
27                           (TVar "_") (comp (Begin es))

```

右辺で使われている `_f`, `_x`, `_b`, `_while` などの識別子は、Util ソースプログラム中に使われている識別子と衝突しないように選んでいる。

U.2 UtilCont — 接続の導入

Util に `break`, `continue` などを導入するために、`Expr` の定義に次のように構成員を追加する。また、`goto` 文を導入するため、ラベルも導入する。

ファイル `ContType.hs`

```

1 data Expr = Const Target | Var String
2           | If Expr Expr Expr | While Expr Expr
3           | Let [Decl] Expr | Val Decl Expr
4           | Lambda String Expr | Delay Expr
5           | App Expr Expr
6           -- ここまでは、Util1と同じ
7           | Begin [LabeledExpr]      -- ブロック
8           | Break                    -- break 文
9           | Continue                 -- continue 文
10          | Goto String               -- goto 文
11          deriving Show
12 type LabeledExpr = (Maybe String, Expr) -- ラベル付き式

```

`Const`, `Var`, `Let` などに対しては `comp` は変更する必要はない。変更された部分のうち、`Goto`, `Break`, `Continue` に対する `comp` の定義は以下ようになる。

ファイル `ContCompiler.hs`

```

1 comp (Goto lbl)          = mkGoto lbl "()"
2 comp Break              = mkGoto "_break" "()"
3 comp Continue           = mkGoto "_while" "_break"

```

```
4
5 mkGoto lbl v = TApp1 (TVar "abort")
6                   (TApp1 (TVar lbl) (TVar v))
```

また、While に対する comp の定義は次のようになる。

ファイル `ContCompiler.hs`

```
1 comp (While e1 e2)      = compWhile e1 e2
2
3 compWhile e1 e2 = TApp1 (TVar "KIO")
4   (TLambda1 "_break"
5     (TLet [(PVar "_while", TApp1 (TVar "unKIO") body)]
6           (TApp1 (TVar "_while") (TVar "_break"))))
7   where body = comp e1 `TBind` TLambda1 "_b"
8             (TIf (TVar "_b") (comp e2 `TBind`
9                   TLambda1 "_"
10                  (TApp1 (TVar "KIO") (TVar "_while"))))
11             (TReturn (TVar "()")))
```


第6章 接続 (continuation)

この章では、`goto` や `break`, `continue` などのジャンプ命令に意味を与えるために (continuation) の概念を導入する。

(補足) “continuation” の日本語訳は「 」のほうが一般的だが、ここでは「接続」を採用する。

接続は直観的には (ジャンプなどがなくて普通に実行するときに) を表す。例えば、次のような C のプログラムでは:

```
int main(void) {
    printf("The result is %d.\n", 1 + fact(10));
    return 0;
}
```

下線の部分の接続は、プログラムの残りの部分 — 1 を足してその結果を出力する、という操作である。

どのようなプログラム処理系でも、プログラムの実行中は何らかの形でこの接続の情報を保持しているはずである。機械語レベルでは、接続は (program counter) と の組に相当する。ジャンプ命令を解釈するためには、この接続の概念を明示的に扱う必要がある。

また、 や など一部の言語は、接続をプログラマーが明示的に扱うことを可能にしている。これによってコルーチン (coroutine) など、さまざまな自明でない制御構造を実現することができる。

この章では接続の概念を導入し、そのさまざまな応用を紹介する。

6.1 接続のモナド

接続 (continuation) のモナドは単独では次のような型になる。

ファイル `Cont.hs`

```
1 newtype K r a = K (          )
2
3 unK :: K r a -> (a -> r) -> r
4 unK (K c) = c
5
6 instance Monad (K r) where
7     return a = K (          )
8     (K m) >>= k = K (          )
9     -- K, unK がなければ、
10    -- m >>= k = \ c -> m (\ a -> k a c)
```

直観的には `r` が“結果”の型、`a -> r` が接続 (“以後実行すべき操作”) の型になる。`return a` は、接続 (`c`) に 渡す。`m >>= k` は、接続 (`c`) の

という接続 ($\backslash a \rightarrow k a c$) を m に渡す。 m は最後にこの接続を呼び出すのが普通だが、無視したり、他の接続を呼び出したりすることも可能である。これが、ジャンプなどの命令に対応する。

6.2 UtilCont — 接続の導入

Util に `break`, `continue` などを導入するために、UtilCont の構文規則に、従来の Util に加えて次のような規則を追加する。

```
Expr          → begin LabeledExprSeq
               | break | continue | goto Var
LabeledExprSeq → LabeledExpr end | LabeledExpr ; LabeledExprSeq
LabeledExpr   → Expr | Var : Expr
```

実際の UtilCont では接続とともに変数の破壊的代入や入出力も扱いたいので、計算のモナドは、 κ そのものではなく、“状態への操作”を“結果”として持つ κ (`WithIO s -> r`) a (と同型の型) とする。ここで、 s は状態の型である。

ファイル `Cont.hs`

```
1 newtype KIO r s a
2   = KIO (
3
4 unKIO :: KIO r s a -> (a -> WithIO s -> r)
5         -> WithIO s -> r
6 unKIO (KIO m) = m
```

この `KIO` の定義にあわせて、`set` など状態に関する関数も書き直しておく。

ファイル `Cont.hs`

```
1 instance MyState (KIO r) where
2   get p =
3     KIO (\ c (s, i, o) -> c (fst (p s)) (s, i, o))
4   set p v =
5     KIO (\ c (s, i, o) -> c () (snd (p s) v, i, o))
6
7 instance MyStream (KIO r s) where
8   readChar =
9     KIO (\ c (s, ch : i, o) -> c ch (s, i, o))
10  eof =
11    KIO (\ c (s, i, o) -> c (null i) (s, i, o))
12  writeStr v =
13    KIO (\ c (s, i, o) -> c () (s, i, o ++ v))
14
15 abort :: (WithIO s -> r) -> KIO r s a
16 abort f = KIO (\ c -> f)
```

すると、`set p v` は、状態の p で表される位置に v をセットし、`()` と新しい状態を接続に渡す。

また、`abort f` は現在の接続を無視して f という値を全体の計算の結果としている。これは計算を途中で中止することに相当する。

ここで `goto`, `break`, `continue` について、変換前の Util と変換後の Haskell の対応は次の表のようになる。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
<code>goto label</code>	<code>abort (label ())</code>
<code>break</code>	<code>abort (break ())</code>
<code>continue</code>	<code>abort (_while _break)</code>

つまり、`goto label` と `break` はそれぞれ、現在の接続は無視して、`label` と `_break` という識別子に束縛されている接続を起動する式に翻訳される。これが“ジャンプ”に相当する。

また `continue` も、現在の接続は無視して、`_while` という識別子に束縛されている計算に `_break` という接続を渡す。

ところで `while ~ do ~` に対しては、`break` に対応する接続を変数に格納する必要があるため、翻訳がやや複雑になる。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
<code>while c do t</code>	<pre> KIO (\ _break -> let KIO _while = [[c] >>= \ _b -> if _b then [[t] >>= \ _ -> KIO _while else return () in _while _break) </pre>

ここで、`_break` は _____ を表す接続で、`_while _break` は _____ を表す接続である。これらの接続が、それぞれ `break`, `continue` に対応する。

例えば、UtilCont プログラム (右は対応する C プログラム) :

<pre> 1 foo y = begin 2 xP := 1; yP := y; 3 while get yP > 0 do 4 begin 5 val x = get xP in 6 val y = get yP in 7 if y == 10 then 8 break 9 else if y == 3 then 10 begin 11 yP := y - 1; 12 continue 13 end else (); 14 xP := x * y; 15 yP := y - 1 16 end; 17 get xP 18 end </pre>	<pre> 1 int foo(int y) { 2 int x = 1; 3 while (y > 0) { 4 5 6 7 if (y == 10) 8 break; 9 else 10 if (y == 3) { 11 y--; 12 continue; 13 } 14 x = x * y; 15 y--; 16 } 17 return x; 18 } </pre>
---	--

は階乗の関数の変な変形であるが、これをコンパイルすると、次の Haskell プログラムが得られる。

```

1 foo = \ y ->
2   set xP 1                >>= \ _ ->
3   set yP y                >>= \ _ ->
4   KIO (\ _break ->
5     let KIO _while
6       = get yP            >>= \ y ->
7         if y > 0 then
8           get xP          >>= \ x ->
9           get yP          >>= \ y ->
10          (if y == 10 then abort (_break ())
11            else if y == 3 then
12              set yP (y - 1) >>= \ _ ->
13              abort (_while _break)
14            else return () >>= \ _ ->
15          set xP (x * y)   >>= \ _ ->
16          set yP (y - 1)   >>= \ _ ->
17          KIO _while
18        else return ()
19      in _while _break) >>= \ _ ->
20   get xP

```

この foo の型は Integer -> KIO a (Integer, Integer) a Integer であるから、値を取り出すためには、整数と初期接続（通常、\ a s -> a）、初期状態 ((0,0), "", "") を渡す必要がある。ここでそのための関数 evalKIO を

```

1 evalKIO m s = unKIO m (\ a s -> a) (s, "", "")

```

と定義すると、evalKIO (foo 9) (0,0) の結果は、_____ に、evalKIO (foo 11) (0,0) は __ になる。（参考: 9! = 362880）

さらに goto に対する意味を与えるためには、ブロック (begin ~ end) のなかで、飛び先のラベルに適切な接続を与える必要がある。ここでは、ラベルが3つ使われている形を例として、翻訳前と翻訳後の形を示す。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
begin	KIO (\ _end -> let
lb11: s ₁	lb11 = \ _ -> unKIO [s ₁] lb12
lb12: s ₂	lb12 = \ _ -> unKIO [s ₂] lb13
lb13: s ₃	lb13 = \ _ -> unKIO [s ₃] _end
end	in lb11 ()

この s₁, s₂, s₃ の中には、goto lb11, goto lb12, goto lb13 が含まれているかもしれない。ターゲット (Haskell) プログラム中の識別子 lb11, lb12, lb13 に束縛されているのはそれぞれ、同名のラベル lb11, lb12, lb13 に対応する接続である。

例えば、次の UtilCont プログラム（右は対応する C プログラム）：

<pre> 1 bar _ = begin 2 xP := 1; 3 labell: 4 if get xP > 100 5 then goto label2 </pre>	<pre> 1 int bar(void) { 2 int x = 1; 3 labell: 4 if (x > 100) 5 goto label2; </pre>
---	--

6	else ();	6	x = x * 2;
7	xP := get xP * 2;	7	goto label1;
8	goto label1;	8	label2:
9	label2:	9	return x;
10	get xP	10	}
11	end	11	

は次のような Haskell プログラムに翻訳される。

```

1 bar = \ _end ->
2     KIO (\ _end ->
3         let label1 = \ _ -> unKIO (
4             get xP >>= \ x ->
5                 (if x > 100 then abort (label2 ())
6                     else return ()) >>= \ _ ->
7                 get xP >>= \ x ->
8                 set xP (x * 2) >>= \ _ ->
9                 abort (label1 ())) label2
10                label2 = \ _ -> unKIO (get xP) _end
11                in unKIO (set xP 1) label1)

```

そして、evalKIO (bar ()) (0,0) を評価すると、結果は になる。

問 6.2.1 次の C の関数とほぼ同等な Haskell の関数をモナドを用いて作成せよ。

```

1 int hoge(int n) {
2     int i = 1, sum = 0;
3     while (i <= n) {
4         sum = sum + i;
5         if (sum > 21) {
6             sum = 0;
7             break;
8         }
9         i = i + 1;
10    }
11    return sum;
12 }

```

今日では構造化プログラミングが一般的になり、goto 文はほとんど使われることはない。上の翻訳結果からは、goto 文を多用したスパゲッティコードは、結局、相互再帰（例えば、A の定義に B を利用し、B の定義に C を利用し、C の定義に A を利用するような状況）を多用することと同等であり、プログラムの意味がわかりにくくなると言える。

6.3 callcc とは

ここで紹介する callcc は Scheme や Ruby などが採用している、プログラマーが接続を直接操作することができるプリミティブである。Scheme では call-with-current-continuation または、省略して call/cc と書く。（Scheme では "-" も "/" も関数名の一部として使えることに注意する。）

1 引数の関数 f に対して、callcc f のように使用すると を引数として、 f を呼び出す。 f のなかで、この接続を呼び出せば、呼出しの接続は無視


```
8 | decrease (n - 1) (callcc k) end
```

という2つの関数を定義して

```
1 | increase 0 (decrease 10)
```

という式を実行すると、

```
_____
```

と出力される。

注意: 実は、この Util プログラムを Haskell に変換すると型エラーになり、そのままではコンパイル・実行できない。これは、callcc の引数の型と戻り値の型が同一になる必要があるからである。

いくつかトリッキーな変換をすると、意味を変えずに型付け可能な定義に書き換えが可能で、上記のような実行結果になる。しかし、ここはコルーチンのアイデアを説明するのが本旨なので、型付けをするためのトリックの詳細には立ち入らないことにする。

なお、Scheme では、

```
1 | (define (increase n k)
2 |   (if (> n 10) '()
3 |     (begin (display " i:") (display n)
4 |             (increase (+ n 1) (call/cc k)))))
5 | (define (decrease n k)
6 |   (if (< n 0) '()
7 |     (begin (display " d:") (display n)
8 |             (decrease (- n 1) (call/cc k)))))
```

のように対応する関数を定義して

```
1 | (increase 0 (lambda (k) (decrease 10 k)))
```

という式を実行すると上記の出力が得られる。

ここでは increase と decrease という2つの関数が交互に実行されていることがわかる。スレッドと似ているが、2つのルーチンが同時に実行される訳ではない。

また callcc は、コルーチンの他にこれまでに紹介したエラー処理 (try ~ catch) や非決定性などのプリミティブも、callcc を用いて定義できることがわかっている。ある意味でオールマイティーなプリミティブである。しかし、その詳細の解説については、ここでは割愛する。

6.5 callcc の表現

我々の言語 UtilCont に callcc を導入するには、接続を関数として渡すためのコードを用意すれば良い。callcc に対応する関数の定義は次のようになる。

ファイル Cont.hs

```

1 callcc :: (a -> KIO v s b) -> KIO v s a -> KIO v s a
2 callcc h = KIO (
3
4 -- KIO, unKIO がなければ
5 -- callcc h = \ c -> let k a = \ d -> c a
6 --
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

```

この callcc の定義中で用いられている k は現在の接続 (d) を捨て、キャプチャーされた接続 (c) を呼び出すという関数である。

翻訳は単に callcc という名前の UtilCont の関数を Haskell の callcc に置き換えれば良い。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
callcc m	<code>[[m]] >>= \ _x -> callcc _x</code>

また、head, tail, null, not, show などの 1 引数で副作用を持たない関数は、次のように翻訳される。

ソース (Util)	ターゲット (Haskell)
purel m	<code>[[m]] >>= \ _x -> return (purel _x)</code>

例えば、先に紹介した UtilCont プログラム multlist を翻訳すると、次の Haskell プログラムが得られる。

```

1 multlist = \ xs ->
2   let aux = \ xs ->
3     return (\ k ->
4       set xP 1 >>= \ _ ->
5       set yP xs >>= \ _ ->
6       KIO (\ _break ->
7         let KIO _while =
8           get yP >>= \ y ->
9           if not (null y) then
10            get yP >>= \ y ->
11            (if head y == 0 then k 0 else
12             get xP >>= \ x ->
13             set xP (x * head y)
14             >>= \ _ ->
15             set yP (tail y) >>= \ _ ->
16             writeStr " " >>= \ _ ->
17             write (head y) >>= \ _ ->
18             KIO _while
19           else return ()
20         in _while _break) >>= \ _ ->
21       get xP)
22   in callcc (\ k -> aux xs >>= \ _f ->
23     _f k) >>= \ result ->
24   writeStr "; result = " >>= \ _ ->
25   write result

```

このとき、プログラムの出力を取り出すために、初期接続と初期状態を与える関数 evalKIO2 を


```
1 evalKIO2 m s = unKIO m (\ a (_,_,o) -> o) (s, "", "")
```

と定義すると、`evalKIO2 (multlist [1,2,3,4,5]) (0, [])` は、`1 2 3 4 5; result = 120` となり、一方、`evalKIO2 (multlist [1,2,3,0,4,5]) (0, [])` は `1 2 3; result = 0` となる。つまり、0 が現れた時点で乗算を打ち切っていることがわかる。

6.6 さらに詳しく知りたい人のために...

接続に関する文献は数多くあるが、文献 (Reynolds 1993) は接続の「発見」について、振り返っている珍しいものである。文献 (Filinski 1994) は、`call/cc` がある意味で「オールマイティー」であることについての説明を与えている。文献 (Sekiguchi et al. 2001) は、Java などの命令型言語に、`call/cc` のような接続を扱うオペレーターを導入する方法を述べている。文献 (Erkook & Launchbury 2000) は `mfixU` などの不動点演算子について解説している。

(Reynolds 1993) John C. Reynolds, "The Discoveries of Continuations" *Lisp and Symbolic Computation*, 6, (233–247). 1993 年

(Filinski 1994) Andrzej Filinski, "Representing Monads" 21st ACM Symposium on Principles of Programming Languages. 1994 年

(Sekiguchi et al. 2001) T. Sekiguchi, T. Sakamoto, and A. Yonezawa, "Portable Implementation of Continuation Operators in Imperative Languages by Exception Handling" *Advances in Exception Handling Techniques*. Springer-Verlag, LNCS 2022. 2001年
<http://www.yl.is.s.u-tokyo.ac.jp/amo/>

(Erkook & Launchbury 2000) Levent Erkook, and John Launchbury, "Recursive Monadic Bindings" *Proc. of the International Conference on Functional Programming*. 2000 年

第P章 Prolog 超簡易入門

Prologは、_____と呼ばれるプログラミング言語の仲間のうち、もっとも代表的なものである。論理型言語では、「～ならば～」という論理式の集まりをプログラムとみなし、論理式の証明をプログラムの実行とみなす。

Prolog などの論理型言語に特徴的な概念としては、_____ (単一化)、_____ (後戻り)、_____ などが挙げられる。

P.1 Prolog でのプログラミング

Prolog では「～ならば～」という論理式の集まりをプログラムとみなすが、この「～」の部分構成するのが、次のような形式である。

述語 (項₁, ..., 項_n)

このかたちを _____ (アトム (Atom)、複合項などと呼ぶこともある。)と呼ぶ。「項」は数・文字列などの定数や変数、あるいはリストなどのデータ構造などである。「述語」は直観的には項₁, ..., 項_n の間の関係を表す。例えば、`father(adam, cain)` という素論理式は「Adam は Cain の父である」という関係を表す。

Prolog のプログラムは、_____ (Horn clause) と呼ばれる形式の集まりである。ホーン節とは、

素論理式₀ :- 素論理式₁, ..., 素論理式_n.

という形である。(最後に必ずピリオド (.) が必要である。)「:-」は左向きの矢印 (←) と考えれば良い。つまり、これは素論理式₁, ..., 素論理式_n がすべて成り立つならば、素論理式₀ も成り立つという規則を表している。

ホーン節の「:-」の左側には素論理式は一つのみであり、これを _____ (head) と呼ぶ、「:-」の右側の素論理式の並びは _____ (body) と呼ぶ。

例えば、

```
1 grandchild(X, Z) :- child(X, Y), child(Y, Z).
```

は、X と Y, Y と Z の間に `child` という関係がある (X が Y の子であり、Y が Z の子である) ならば、X と Z の間に `grandchild` という関係がある (X は Z の孫である) という規則を述べている。ここで X, Y, Z は変数である。Prolog の変数は X, Xs, Y のように、アルファベットの _____ (あるいはアンダースコア「_」) からはじまる識別子 (名前) を使用する。一方、小文字からはじまる識別子は、述語や構成子などの定数に利用される (感覚的には Haskell と全く逆なので注意する。)。変数はどのような項に具体化しても良いので、変数を使用した規則は、実際には無数の規則を表していることになる。

ホーン節のうちボディーがないものを fact (fact) と言う。このときは、「:-」も省略する。(文末のピリオドは必要である。) 例えば、

```
1 child(hidetada, ieyasu).
```

は hidetada (秀忠) が ieyasu (家康) の子である、という事実を表明している。ここで hidetada, ieyasu は小文字からはじまるので定数である。

Prolog のプログラムは、このようなホーン節 (事実を含む) を集めたものである。例えば徳川家の家系図を表すプログラムの一部は次のようになる。

```
1 grandchild(X, Z) :- child(X, Y), child(Y, Z).
2
3 child(hideyasu, ieyasu).
4 child(hidetada, ieyasu).
5 child(yoshinao, ieyasu).
6 child(yorinobu, ieyasu).
7 child(yorifusa, ieyasu).
8
9 child(iemitsu, hidetada).
10 child(tadanaga, hidetada).
11 child(masayuki, hidetada).
12
13 child(ietsuna, iemitsu).
14 child(tsunayoshi, iemitsu).
```

このようなプログラムをファイルに作成し、処理系にロード (Prolog では伝統的に consult という。) する。例えば Windows 上で動作する SWI-Prolog という処理系ではメニューの「File」—「Consult ...」でプログラムファイルをロードすることができる。プログラムは、このようなホーン節の集まりに対して質問を発することにより起動される。Prolog の処理系は「?- 」というプロンプトを出力するので、このあとに質問を入力する。(質問も最後に必ずピリオドが必要である。)

```
1 ?- grandchild(hidetada, ieyasu).
2
3 No
4 ?- grandchild(iemitsu, ieyasu).
5
6 Yes
```

1 番目の質問は、Hidetada (秀忠) は ieyasu (家康) の孫か? という質問である。これはプログラム中の規則から導出できないので、処理系は No と答えている。2 番目の質問は、iemitsu (家光) は家康の孫か? という質問である。これは、child(hidetada, ieyasu). と child(iemitsu, hidetada). という二つの事実と

```
grandchild(X, Z) :- child(X, Y), child(Y, Z).
```

というホーン節から導出できるので Yes と答えている。

さらに Prolog では質問の中に変数を含めることができる。すると Prolog の処理系は、その質問を成り立たせる _____ を出力する。例えば、

```
1 ?- grandchild(X, ieyasu).
という質問に対しては、
1 X = iemitsu
```

という解を出力する。ここで、リターンキーを押すとこれで終わってしまうが、「;」を入力すると、さらに別解を表示させることができる。

```
1 X = iemitsu ;
2
3 X = tadanaga ;
4
5 X = masayuki ;
6
7 No
```

質問には一般に複数の素論理式を並べることができる。

```
?- 素論理式1, ..., 素論理式n.
```

このような形を _____ と呼ぶ。直観的には、並べた素論理式がすべて成り立つか? (成り立たせるような変数への代入が存在するか?) という質問を表している。

P.2 単一化 (ユニフィケーション) と後戻り

この節では、Prolog のプログラムの実行方法を解説する。解説を簡単にするために、まず、最初にいくつかの言葉を定義しておく。

2 つ以上の (通常変数を含む) 素論理式があり、変数に適切な代入をして、これらの素論理式をまったく同一のものにすることができるとき、これらの素論理式は _____ (unifiable) であるという。また、その時の代入を _____ (unifier) という。例えば、次の 2 つの素論理式

```
p(a, Y, Z) と p(X, b, Z)
```

は $X = a, Y = b$ を単一化代入として単一化可能である。単一化可能なときは、通常必要なのは最汎 (最も一般的な) 単一化代入 (most general unifier, _____) である。例えば、上の例では、 $X = a, Y = b, Z = c$ という代入も単一化代入であるが、前者の方がより一般的である。実際、この例の場合は $X = a, Y = b$ が MGU になる。

プログラム中のホーン節

```
P :- Q1, Q2, ..., Qn,
```

のヘッド P が素論理式 (G) と単一化可能なとき、このホーン節は G に _____ という。

Prolog のプログラムの実行方法は、次のようにまとめられる。

1. ゴール節中の _____ 素論理式に対し、適用できるホーン節を選ぶ。適用できるホーン節が複数あるときは、プログラム中に _____ ホーン節から試みる (Prolog を定理証明系として見たときには、ここで、「最も左」、「先に書かれている」という選択をするために、証明系としての力が弱くなってしまう。つまり、このような制限をしなければ証明できるはずの論理式が証明できなくなってしまう。しかし、プログラミング言語として見たときは、効率を確保するために必要な制限である。)
2. 選んだ適用可能なホーン節に対して、その MGU をゴール節の残りの素論理式に適用し、さらにゴール節中の最左素論理式を、上で選んだホーン節のボディに MGU を適用したものと置き換える。(ホーン節のボディがないときは、最左素論理式を消す。)
3. もし適用できるホーン節がなければ、後戻り (_____) して、ひとつの前のゴール節中の素論理式がある状態からやり直す。そして、その素論理式に適用できるホーン節のうち次の候補を選ぶ。
4. ゴール節に素論理式がなくなれば、プログラムの実行を終了し、その時得られた変数への代入を表示する。素論理式がまだあれば、1. に戻る。

具体的に、

```
1 ?- grandchild(X, ieyasu).
```

というゴール節での動作を説明することにする。まずこのゴール節の最左 (1 つしかないが) 素論理式は `grandchild(X, ieyasu)` である。これに適用できるホーン節は、今のプログラムでは、

```
grandchild(X, Z) :- child(X, Y), child(Y, Z).
```

しかなく、最汎単一化代入は $Z = ieyasu$ である。するとゴール節は

```
1 _____ ... ①
```

に変換される。

次に、この最左の `child(X, Y)` に適用できる最初のホーン節は、

```
child(hideyasu, ieyasu).
```

であり、MGU は $X = hideyasu$, $Y = ieyasu$ である。すると、ゴール節は、

```
1 _____
```

に変換される。しかし、このゴール節に適用できるホーン節はない。

そこで、上の ① のところまでバックトラックし、次の候補である

```
child(hidetada, ieyasu).
```

の適用を試みる。しばらくのあいだ同様にバックトラックが続き、最終的に①のゴール節に対し、

```
child(iemitsu, hidetada).
```

というホーン節を選ぶ。そのとき MGU は $X = iemitsu$, $Y = hidetada$ となる。すると、ゴール節は、

```
1
```

に書き換えられる。これはすぐに適用できるホーン節が見つかり、ゴール節が空になって、結果として代入:

```
1 X = iemitsu
```

が出力される。ここで「;」が入力されると、またバックトラックが起こる。

ホーン節の適用は命令型言語・関数型言語の関数呼出しのようなものだと考えることもできるが、単一化により呼び出される側（ホーン節のヘッド）から呼び出す側（ゴール節）に情報が流れることがある、というところが論理型言語に特徴的なところである。例えば、

```
1 ?- child(X, ieyasu).
```

という呼出しに対しては、 $X = hideyasu$ （あるいは $hidetada$, $yoshinao$...）という情報が、呼び出された側から、呼び出した側に伝えられる。

Prolog の変数は命令型言語の変数と異なり、いったん単一化により値が代入されれば、以降は値を変更されることはない。ただし、（純）関数型言語の変数とも異なり、最初はいったん不定 (unknown) な状態を取ることができる。このような振舞いをする変数は一般に (logical variable) と呼ばれる。

P.3 Prologでのリスト処理

Prolog でのリストの記法は要素を「,」で区切り、角括弧（[と]）で囲んで、 $[1, 2, 3]$ のように書く。

また、先頭の要素が X で、先頭を除く残りの要素からなるリストが Xs であるようなリストは と表記される。これは Haskell の $x:xs$ という書き方に相当する。また、 $[1, 2, 3]$ は の略記法である。

Prolog でのリストを接続 (append) するプログラムは次のように記述できる。

```
1 myappend([], Y, Y).
2 myappend([H|X], Y, [H|Z]) :- myappend(X, Y, Z).
```

これは、1 番目の引数と 2 番目の引数を接続した結果が 3 番目の引数になる、という関係を表している。

例えば、 $[1, 2]$ と $[3, 4]$ の接続は次のように求められる。

```

1 ?- myappend([1,2], [3,4], Z).
2
3 Z = [1,2,3,4] ;
4
5 No

```

問 P.3.1 実際に、上のような結果が出ることを、上に示した Prolog の実行方法で1ステップずつ確認せよ。

上の問を解いてみるとわかるが、変数 Z_0 は後ろの要素が不定（変数）のまま、前の要素から順に定まっていく。

後ろの要素がもっと後で定まるようなプログラムを書くことも可能である。例えば、

```

1 myconcat([], []). % ①
2 myconcat([Xs|Xss], Ys)
3   :- myappend(Xs, Zs, Ys), myconcat(Xss, Zs). % ②

```

これは、リストのリストを平坦なリストに変換するプログラムである。

```

1 ?- myconcat([[1, 2], [3, 4, 5], [6, 7]], Ys).
2
3 Ys = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] ;
4
5 No

```

問 P.3.2 実際に、上のような結果が出ることを、上に示した Prolog の実行方法で1ステップずつ確認せよ。

この myappend の第 2 引数の Zs はあとの myconcat の呼出して値が定まる。また myappend の第 3 引数の Ys はしばらくの間、最後が論理変数で終る形で扱われることになる。

このように尾 (tail) の部分が論理変数になっているリストを (open list) という。開リストは Prolog でリストを扱う時に良く使われるイディオムである。

さらに Prolog のおもしろいところは myappend の逆向きの計算もできるということである。

```

1  ?- myappend(X, Y, [1, 2, 3]).
2
3  X = []
4  Y = [1, 2, 3] ;
5
6  X = [1]
7  Y = [2, 3] ;
8
9  X = [1, 2]
10 Y = [3] ;
11
12 X = [1, 2, 3]
13 Y = [] ;
14
15 No

```

この例では接続して [1, 2, 3] になる 2 つのリストの、すべての可能性を求めていることになる。ユーザーが「;」を入力するたびにバックトラックが起り別解を表示する。

問 P.3.3 逆向きの myappend の計算ができることを、前節で示した Prolog の実行方法で実際に 1 ステップずつ確認せよ。

第S章 Scheme 超簡易入門

Scheme は、Lisp の一方言である。Scheme は関数型言語であるが、Haskell と異なり、変数への代入など命令的な特徴を残している。また遅延評価ではなく、関数の引数を先に評価する、先行評価を採用している。

S.1 Scheme でのプログラミング

関数適用

関数適用 (function application) は次のような形である。

- (関数 引数₁ 引数₂ ... 引数_n) のような _____ (parenthesis) でくくった式の列

Scheme では + や × などの算術演算子に、通常の _____ (infix notation) ではなく、_____ (prefix notation) を用いることが特徴的である。例えば、(+ 1 2) という式では、「+」が関数 (function) , 1 と 2 が引数である。

変数と代入

例えば、

```
(define x 5)
```

という式で、5 という値の入った "x" という名前の変数を用意する。これ以降は x という変数は 5 に評価される。

Scheme の場合、変数名の中には、アルファベット、数字の他に

```
+ - . * / < = > ! ? : $ % _ & ~ ^
```

などの記号を用いることができる。(もちろん空白はダメ) アルファベットの大文字と小文字は _____。(つまり、Japan と japan は _____ 変数である。)

また set! という命令によって、変数の値を変更する(代入するという)ことができる。(C 言語の「=」演算子に対応する。)

```
(set! x 4) ; 変数 x の値を 4 に変更する。  
; それ以前に x を define しておく必要がある。
```

これは、Scheme が _____ としての側面を持つことを示す。なお、Scheme では「;」から行末までがコメントである。

リスト

リストを入力するためには、組み込み関数 list を用いる。list は任意の数の引数を取ることができる。

```
1 > (list 1997 5 6)
2 (1997 5 6)
3 > (list "kagawa" "university")
4 ("kagawa" "university")
```

単に (1997 5 6) と入力すると、Scheme の処理系は、1997 という関数を 5 と 6 という引数に適用しているのだと判断してしまう。

このように、Scheme (一般に Lisp) では丸括弧「(」、「)」が2つの意味に使われる。ユーザが入力するときは「 」の意味に、処理系が出力するときは「 」の意味になる。もっと正確に言うとユーザが「リスト」を入力すると、処理系はそれを「関数適用」だと解釈するのである。

このような処理系の振舞いは Lisp の強かさの源であるが、一方で混乱のもとでもある。

上記のデータは「'」(クォート記号・引用記号)を用いて次のように入力できる。

```
1 > '(1997 4 22)
2 (1997 4 22)
```

「'式」は、「(quote 式)」とも書く。(むしろ、後者が正式な書き方である。)

```
1 > (quote (1997 5 6))
2 (1997 5 6)
```

ここで quote は、その ことを表す。だから、(1997 5 6) は関数適用ではなくリストと解釈される。

空リスト (要素を1つも含まないリスト) は '() または (list) のように入力する。

```
1 > '()
2 ()
3 > (list)
4 ()
```

また cons (と読む), car (と読む), cdr (と読む) などが、リストを操作するための最も基本的な関数である。ここで cons はリストを組み立てるための関数、car と cdr はリストを分解するための関数である。

- cons — 第2引数として与えられるリストの先頭に、第1引数として与えられる要素を付け加えたリストを返す
- car — リストの先頭の要素を返す
- cdr — リストの先頭を除いた残り (のリスト) を返す

- null? — リストが空ならば真、空でなければ偽を返す

関数定義

関数の定義には次の形式の `define` を用いる。

```
(define (関数名 変数1 ... 変数n) 定義)
```

変数₁ ... 変数_nはこの関数の仮引数である。

```
1 > (define (square x) (* x x))
2 square
3 > (square 4)
4 16
```

条件判断

条件判断は次のような形式で行なう。

```
(if 条件式 式1 式2)
```

条件式が を、 を評価（計算）する。（Cの `if` 文と異なり、値を返すことに注意する。むしろ、Cの「?:」オペレーターに対応する。）

逐次実行

```
(begin 式1 式2 ... 式n)
```

式₁から、式_nを順に評価し、最後の式_nの値を全体の値として返す。通常、式₁から、式_{n-1}は のために実行される。CやJavaScriptのブロック `{ ~ }` と意味は似ているが、CやJavaScriptのブロックは“文”の一種であるので値を持たないのに対し、Schemeの `begin` 式は値を持つ。

なお、関数の定義の本体で、

```
1 (define (hen_na_square x)
2   (begin (set! x (* x x))
3         x))
```

のように順に式を評価するときは、上のように `begin` を使う必要はなく、

```
1 (define (hen_na_square x)
2   (set! x (* x x))
3   x)
```

のように単に式を並べて書くだけで良い。（これを“暗黙”の `begin` という。）

局所変数 (let)

関数の定義の他に `let` という構文で局所変数を導入することができる。

```
(let ((変数1 式1)
      ...
      (変数m 式m))
  式0)
```

この let 文では、式₁から式_mを評価した結果が、変数₁から変数_mに入れられ、最後に式₀を評価する。変数₁,..., 変数_mの範囲は式₀である。

ラムダ式 (匿名関数)

```
(lambda (変数1 ... 変数n) 定義)
```

これは変数₁ ... 変数_nを引数とする関数である。例えば、(lambda (x) (* x x))は2乗する関数である。((lambda (x) (* x x)) 2)は4になる。lambdaはギリシャ文字のλのことである。これらは define を用いて定義した名前付きの関数:

```
(define (square x) (* x x))
```

の square と同じ関数になる。つまり、(define (square x) (* x x))は (define square (lambda (x) (* x x)))と同じ意味なのである。

S.2 Scheme の call-with-current-continuation

Scheme では、プログラマが接続を直接操作することができる。このことを Scheme は (first-class continuation) を持つという言い方をするときもある。

```
(call-with-current-continuation thunk)
(call/cc thunk)
```

この call-with-current-continuation という名前は長いので、省略形の call/cc がよく使われる (Scheme は、「-」や「/」のような文字も変数の名前の中で使用できるので、call-with-current-continuation や call/cc でひとつの名前である。ただし、call/cc は Scheme の標準仕様には含まれていないので、処理形によっては、(define call/cc call-with-current-continuation) のように自分で定義しておく必要がある。))。

ここで *thunk* は 1 引数の関数であり、(call/cc *thunk*) は を引数として、*thunk* を呼び出す。この *thunk* のなかで、この接続を呼び出せば、そのときの接続は無視されて (= ジャンプして)、call/cc が呼ばれたときの接続にその値が返される。また *thunk* が接続を呼び出さなければ、*thunk* 自身の戻り値が call/cc 式全体の戻り値になる。

例えば、

```
1 (define (bar x)
2   (call/cc (lambda (k)
3     (+ 100 (if (= x 0) 1 (k x))))))
```


call/cc を用いて定義できることがわかっている。ある意味でオールマイティなプリミティブである。

しかし、call/cc は効率的な実装の難しいプリミティブでもある。素直な実装では call/cc を実現するためには、スタック全体のコピーを行なう必要がある。一方、はじめからスタックをヒープの中に取り、スタックのコピーを行わないという方式もある。この方式では不要になったスタック領域も _____ で回収する。

S.4 さらに詳しく知りたい人のために...

文献 (R⁶RS) は Scheme の仕様書である。通常、略して R⁶RS と呼ばれる。中に call/cc の簡単な解説もある。

(R⁶RS) Richard Kelsey, William Clinger, and Jonathan Rees (Editors),
“Revised⁶ Report on the Algorithmic Language Scheme”
<http://www.r6rs.org/>

第J章 JavaScript 超簡単入門

JavaScript (ECMAScript) の基本をごくごく簡単に説明する。

J.1 JavaScript の基本

変数

JavaScript には型チェックはないので、変数の宣言に型の情報は必要なく、`var` というキーワードで変数を宣言する。

```
var i = 0;
```

2015 年の ECMAScript 6 (ES6) からはさらに `let`, `const` という 2 つのキーワードが追加された。このうち、`let` はブロックスコープの局所変数を宣言する。つまり、`let` というキーワードで宣言された変数は、その周りのブレース (`{ ~ }`) の間でのみ有効である。

一方、`const` はブロックスコープの代入不可の変数を宣言する。つまり、代入して値を変えようとする、実行時にエラーになる。

演算子

次のような演算子 `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `++`, `--`, `=`, `+=`, `==` の意味は C 言語や Java とほぼ同じである。また「`+`」演算子は文字列の接続にも使用できる。

制御構造

条件判断 (`if` 文), 繰り返し (`while` 文, `for` 文, `do ~ while` 文) はほとんど C 言語や Java と同じである。

関数の定義

関数の定義も C 言語と良く似ているが、JavaScript では戻り値の型を書く必要がないので、C 言語で関数の戻り値の型を書く部分に、キーワード `return` を用いるところだけが異なる。また、仮引数の型を宣言する必要もない。return 文の書き方も C 言語と同じである。

<pre>1 // JavaScript 2 function cube(n) { 3 return n * n * n; 4 }</pre>	<pre>1 /* (参考) C 言語 */ 2 double cube(double n) { 3 return n * n * n; 4 }</pre>
---	--

もう一つ C 言語と異なる点として、JavaScript では、関数定義のなかに別の関数を定義することができる。

匿名関数

JavaScriptでも無名の関数を定義することができる。JavaScriptでは次のような形を用いる。

```
function (変数1, ..., 変数n) { 宣言・文の並び }
```

つまり、`function` というキーワードと括弧の間に関数名がない。

J.2 ジェネレーター

ECMAScript 6 (2015年)よりジェネレーター (generator) 関数という機構が導入された。ジェネレーター関数はコルーチンの一種 (stackless coroutine) を提供する。

ジェネレーター関数は `function*` というキーワードで定義される。

```
1 function* gfib(n) {
2   var a = 1, b = 1;
3   while (a < n) {
4     yield a;
5     var tmp = b;
6     b += a;
7     a = tmp;
8   }
9 }
```

ジェネレーター関数の内部では `yield` というキーワードを使って値を生成する。

ジェネレーター関数を呼び出すと、すぐに関数内部のコードが実行されるのではなく、一旦、ジェネレーター (generator) オブジェクトが作られて返される。このジェネレーターオブジェクトの `next` メソッドを呼び出すと、ジェネレーター関数内部のコードが実行され、`yield` された値を `value` プロパティーとして持つオブジェクトを返す。さらに `next` メソッドを呼び出すと yield 式のつづきから実行が再開 され、やはり、次の `yield` された値を `value` プロパティーとして持つオブジェクトを返す。

```
1 var gen = gfib(100);
2 console.log(gen.next().value); // 1 を出力する
3 console.log(gen.next().value); // 1 を出力する
4 console.log(gen.next().value); // 2 を出力する
5 console.log(gen.next().value); // 3 を出力する
```

ジェネレーターオブジェクトは `for ~ of` 文の中でも使うことができる。

```
for (変数 of 式) {
  文の並び
}
```

この `for ~ of` 文はジェネレーターオブジェクト (より一般的には `iterable` オブジェクト) の `next` メソッドによって返されるオブジェクトの `value` プロパ

ティーを変数に代入してループする。ジェネレーター関数の中のコードの実行が return するか、関数を抜けるとループを終了する。

```
1 for (v of gfib(10)) {
2   console.log(v); // 1, 1, 2, 3, 5, 8 を出力する。
3 }
```

J.3 HTML タグ

JavaScript は HTML の `<script type="text/javascript"> ~ </script>` というタグの間に書く。

```
1 <script type="text/javascript">
2 // ここに JavaScript のプログラムを書く。
3 </script>
```

あるいは、

```
1 <script type="text/javascript" src="nantoka.js">
2 </script>
```

で、別ファイル (`nantoka.js`) の JavaScript ソースを読み込める。

J.4 JavaScript プログラムのデバッグ

JavaScript はプログラムの実行前にエラーを見つけてくれないので、気軽に試せる反面、デバッグがしにくい、という短所がある。

問題があったときでも、実行が止まってしまって画面に何も表示されず、そのままでは手がかりが何も得られないことが多い。そういう場合はブラウザの「コンソール」という画面を表示しておけば、実行時に表示されるエラーメッセージを見ることができる。「コンソール」の表示の仕方はブラウザによって異なるが、Firefox の場合は、「ツール」 - 「Web 開発」 - 「Web コンソール」、Internet Explorer の場合は「ツール」 - 「F12 開発者ツール」で表示されるようである。

コンソール画面にメッセージを出力するためには `console.log` という関数を使う。また、`alert` という関数を呼び出すと、画面に警告ダイアログを開くことができる。(alert の場合、警告ダイアログを閉じるまで、次の処理に進まない。)

```
1 console.log("Hello!");
1 alert("Hello!");
```

これらの関数呼び出しをプログラム中に適宜挿入しておいて実行すると、どこまで実行されたか、どこで実行が止まっているか、などを確認することができる。

J.5 さらに詳しく知りたい人のために ...

文献 (ECMA 262) は、JavaScript (ECMAScript) の仕様書である。

(ECMA 262) ECMA International "ECMAScript Language Specification"
<https://www.ecma-international.org/publications-and-standards/standards/ecma-262/>

第7章 Continuation-Passing Style (CPS)

この章では接続の概念の応用を説明する。

7.1 Continuation-Passing Styleとは

Continuation-Passing Style (CPS) とは常に関数に接続（に相当するもの）を引数として _____ 受け渡すプログラムの書き方のことである。次のような使い途がある。

- `call/cc` のない言語でコルーチンなど _____ を実現したいときに用いる
- プログラムを効率の良い形に変換したいときに、変換の途中の中間形式で用いる

また、JavaScript で非同期の関数 (`XMLHttpRequest` の `send` など) を呼び出すときには、CPS に準じてプログラムを書かざるを得ないときもある。（なお ECMAScript 2017 以降では、`async`, `await` を用いて非同期の処理が書き易くなった。）

CPS のプログラムは次のような制限に従う。

- 関数呼び出しが _____ 。（つまり、関数呼び出しの引数は関数呼び出し（ただし、「+」や「*」のようなプリミティブな関数の呼び出しは除く。）になっていることがない。）だから、結果が評価順によらない

CPS 変換とは、接続として恒等関数 (`\ x -> x`) を渡したときに、意味が同じになるような CPS のプログラムに変換することである。例えば、ファイル `ProdPrimes.js`

```
1 function prodPrimes(n) {
2   if (n == 1) return 1;
3   else if (isPrime(n)) return n * prodPrimes(n - 1);
4   else return prodPrimes(n - 1);
5 }
```

という関数を考える。これは 1 から `n` までの範囲に存在する素数の積を求める関数である。ここで `isPrime` は素数かどうかを判定する関数とする。これを、CPS 変換すると、次のような関数 `prodPrimesCPS` に変換される。（ここには定義を示していないが、`isPrime` を CPS 変換した関数を `isPrimeCPS` とする。）

ファイル `ProdPrimes.js`

```
1 function prodPrimesCPS(n, c) {
2   if (n == 1) return c(1);
3   else return isPrimeCPS(n, function(b) {
```

```

4   if (b)
5       return prodPrimesCPS(n - 1,
6                               );
7   else return prodPrimesCPS(n - 1, c);
8       });
9   }

```

(JavaScript の記法で紹介しているが、他のプログラミング言語でも同様の変換は可能である。)

```
prodPrime(n) = prodPrimeCPS(n, function (x) { return x; })
```

という関係が成り立つ。ここで isPrimeCPS を呼び出すときに、戻ってきたときに行なうべき処理を接続:

```

function (b) {
  if (b)
    return prodPrimesCPS(n - 1, function (p) {
      return c(n * p);
    });
  else return prodPrimesCPS(n - 1, c);
}

```

として isPrimeCPS に渡している。さらにこの接続の中で、prodPrimesCPS を呼び出すときに、b の値に応じて、n を掛けてから c に渡すという接続:

function (p) { return c(n * p); }, またはもとのままの接続である c を渡している。

CPS はコンパイラの中間言語として用いられることがある。これは関数の呼び出しの順番が明確になり、関数の呼び出しを単なるジャンプ命令で実現して良いという性質があるからである。

プログラムを CPS に変換するには、だいたい次のような手順で行なう。

1. すべての関数定義に を一つ追加する

```
function prodPrimes(n) { ... } ⇒ function
prodPrimesCPS(n, c) { ... }
```

2. 関数の戻り値に相当する位置にある単純な式は、**接続に渡す**。(ここで**単純な式**とは ...

定数、変数、ラムダ式、プリミティブオペレーター (「-」, 「==」 など) を単純な式に適用した式、のいずれか)

```
... return 1; ... ⇒ ... return c(1); ...
```

3. 関数の戻り値に相当する位置にある (単純な式でない) 関数適用は、**接続を引数として渡す**。

```
... return prodPrimes(n - 1); ... ⇒ ... return prodPrimesCPS(n
- 1, c)
```

4. その他の位置にある (単純な式でない) 関数適用は、“適切な” (“適切な”接続の正確な定義をここで与えることは断念する。要するに恒等関数 $(\lambda x. x)$ を接続として渡されたときに元のプログラムと意味が変わらず、

CPS 変換を施す目的が達成できれば良い。) 接続を明示的に受け取る形に変換する。

```
... return n * prodPrimes(n - 1); ... ⇒ ... return
prodPrimesCPS(n - 1, function (p) { return c(n * p);
}) ...
```

正式な CPS 変換の定義は、UtilCont に対する Haskell への翻訳そのものである。つまり、UtilCont を Haskell に翻訳し、ただし通常は return を $\lambda a c . > c a$ 、($>>=$) を $\lambda c \rightarrow m (\lambda a \rightarrow k a c)$ に置き換え、さらに見易いかたちにするための β 簡約を実施すれば CPS 変換になる。主な部分を return と ($>>=$) を置き換えた上で、再構成すると次の表のようになる。この表のなかでソース中で *Italic* フォントで示されている m, n などは任意の Util の式で、ターゲット中で m, n のように°(ドット)が付いている式は、その CPS 変換後の式を表す。

ソース (Util)	ターゲット (CPS)
x (ただし x は定数・変数)	$\lambda _c \rightarrow _c x$
val $x = m$ in n	$\lambda _c \rightarrow [m] (\lambda x \rightarrow [n] _c)$
$f a$	$\lambda _c \rightarrow [f] (\lambda _g \rightarrow [a] (\lambda _x \rightarrow _g _x _c))$
$\lambda x \rightarrow m$	$\lambda _c \rightarrow _c (\lambda x \rightarrow [m])$
if b then t else e	$\lambda _c \rightarrow [b] (\lambda _b \rightarrow \text{if } _b \text{ then } [t] _c \text{ else } [e] _c)$
begin s ; t ; u end	$\lambda _c \rightarrow [s] (\lambda _ \rightarrow [t] (\lambda _ \rightarrow [u] _c))$

ターゲット言語は Haskell でなくても、ラムダ式を持っていれば良いので、UtilCont から UtilCont への変換と見なすことも出来る。あるプログラミング言語(例えば JavaScript) が UtilCont と同等の制御構造を持っていれば、JavaScript と UtilCont の間の変換を介して、JavaScript から JavaScript への CPS 変換を考えることができる。(関数呼出しがネストしないので、ターゲット言語の評価戦略が遅延評価か先行評価かは関係ない。)

ソース (JavaScript)	ターゲット (JavaScript)
x (ただし x は定数・変数)	function ($_c$) { return $c(x)$; }
var $x = m$; n	function ($_c$) { return $[m]$ (function (x) { return $[n]$ ($_c$); }); }
$f(a)$	function ($_c$) { return $[f]$ (function ($_g$) { return $[a]$ (function ($_x$) { return $_g(_x)(_c)$; }); }); }

<code>function (x) { m }</code>	<code>function (_c) { return _c(function (x) { return [m]; }); }</code>
<code>if (b) { t } else { e }</code>	<code>function (_c) { return [b](function (_b) { if (_b) { return [t](_c); } else { return [e](_c); } }); }</code>
<code>s; t; return u;</code>	<code>function (_c) { return [s](function (_) { return [t](function (_) { return [u](_c); }); }); }</code>

7.2 CPS の応用—再帰呼出しの繰返しへの変換

CPS を利用してプログラムの変換を行なうことがある。例として再帰的関数を CPS を経由して繰返しへ変換する場合を取り上げる。

変換の対象は、次のように定義された階乗の関数である。

```
1 function fact(n) {
2   if (n == 0) return 1;
3   else return n * fact(n - 1);
4 }
```

これは数学的な記法の定義:

$$0! = 1$$

$$n! = n \times (n - 1)! \quad (n > 0)$$

に直接対応していてわかりやすいが、実行時には n に比例するスタック領域が必要にある。

この `fact` を CPS に変換すると次のようなプログラムになる。

ファイル `Fact.js`

```
1 function factCPS(n, c) {
2   if (n == 0) return c;
3   else
4     return factCPS(n - 1,
5                     c);
6 }
```

さらに、これは末尾再帰なので、次のように繰返しに書き換えることができる。

ファイル `Fact.js`


```

1 function aux(n, c) {
2   return function(r) {
3     return c(n * r);
4   };
5 }
6
7 function factCPS(n, c) {
8   while (n > 0) {
9     c = aux(n, c); n--; // 注†
10  }
11  return c(1);
12 }

```

†ここは `c = function (r) { return c(n * r); }` と書くことはできない。JavaScript のセマンティクスでは、右辺の変数 `n, c` の値も変わってしまうからである。aux 関数を介すると `n, c` の値がコピーされるため安全である。

繰返しに変換されたが、`c` がどんどん大きくなってしまいうので、領域の節約にはならない。しかし、良く観察すると `c` は常に次のような形の関数であることがわかる。

```
function (r) { return n * (n - 1) * ... * m * r; }
```

つまり、fact の場合、第 2 引数として本当の接続を受け渡さなくても、この `n * (n-1) * ... * m` で接続を表現可能ということである。このことを考慮に入れてさらにプログラムを変換すると、次の定義が得られる。

ファイル Fact.js

```

1 function factCPS(n, m) {
2   while (n > 0) {
3     n--;
4   }
5   return m;
6 }

```

これは、通常の繰返しによる階乗関数の定義である。このように非末尾再帰を除去する場合、まず CPS に変換して末尾再帰のかたちにし、繰返しに書き換え、それから“接続”を同等のオブジェクトに置き換えるとよい。

7.3 CPS の応用—Web プログラミング

Servlet や JavaScript など WWW 上のインタラクティブなアプリケーションを作成するときに、プログラムの任意の場所でユーザーの入力を待って、続きから実行するという書き方ができない（必ず `doGet` などの関数のはじめから実行されてしまう）という制約がある。

そこで、インタラクティブなプログラムを実現するために、さまざまなテクニックが必要になるが、CPS への変換はある意味でオールマイティーな（つまり、どんな場合にも適用可能な）手段である（もちろん、言語に最初から `call/cc` が用意されていれば、このような面倒なことをする必要がない。）。

トリッキーな例として JavaScript のハノイの塔のプログラム:

ファイル Hanoi0.js

```
1 function move(n, a, b) { // 非 CPS 版
2   document.form.textarea.value
3   += ("move " + n + " from " + a + " to " + b);
4   return 0; // 形をそろえるため 0 を return する
5 }
6
7 function hanoi(n, a, b, c) { // 非 CPS 版
8   if (n > 0) {
9     hanoi(n - 1, a, c, b);
10    move(n, a, b);
11    hanoi(n - 1, c, b, a);
12  }
13  return 0;
14 }
```

を「ボタンを押したら1行表示する」というバージョンに書き換える、ということを考える。つまり、

```
1 <form name="form">
2 <input type="button" onClick="exec()" value="実行"><br>
3 <textarea name="textarea" cols="20" rows="32">
4 </textarea>
5 </form>
```

というフォームの「実行」ボタンを押せばテキストエリアに1行表示するようにする。

まず、hanoi を CPS に書き換える。

ファイル Hanoi.js

```
1 function moveCPS(n, a, b, k) { // 暫定版 (説明用)
2   document.form.textarea.value
3   += ("move " + n + " from " + a + " to " + b +
4   "\n");
5   return k(0);
6 }
7
8 function hanoiCPS(n, a, b, c, k) { // 最終版
9   if (n > 0) {
10    return hanoiCPS(n - 1, a, c, b, function(ignore) {
11      return moveCPS(n, a, b, function(ignore) {
12        return hanoiCPS(n - 1, c, b, a, k);
13      });
14    });
15  } else {
16    return k(0);
17  }
```

しかし、ここで、

```
1 function exec() { // 暫定版 (説明用)
2   return hanoiCPS(5, 'a', 'b', 'c',
3     function(n) { return n; });
4 }
```

のように、hanoiCPS を呼び出しても、これまで通り一気に最後まで出力してしまうだけである。そこで moveCPS を次のように書き換える。

```
1 function moveCPS(n, a, b, k) { // 最終版
2   document.form.textarea.value
3     += ("move " + n + " from " + a + " to " + b +
4     "\n");
5   return ; // ではない。
}
```

つまり、最後に接続を呼び出してしまわず、いったん呼び出し側に接続を戻り値として返す。(このような手法をトランポリンと言うらしい。) これで call/cc と同じような接続を明示的に扱う効果が得られる。この接続を利用するために exec を次のように書き換える。

```
1 function doEnd(n) { // 最終版
2   document.form.textarea.value += "end\n"; // 最後の処理
3   return doEnd;
4 }
5
6 // 最初のエントリーポイント
7 var restart = function(ignore) {
8   return hanoiCPS(5, 'a', 'b', 'c', doEnd);
9 };
10
11 function exec() { // 最終版
12   //
13 }
```

この exec は restart(0) の実行結果を新しい restart の値として保存するだけである。これで「実行」ボタンを押すたびに move が 1 回ずつ実行されるようになる。

もう一つの例として、次のフィボナッチ数列を計算する関数を CPS 化してみる。

ファイル `Fib0.js`

```
1 function showArgument(m) { // 非 CPS 版
2   document.form.textarea.value += ("argument = " + m);
3   return 0;
4 }
5
6 function showResult(m, r) { // 非 CPS 版
7   document.form.textarea.value
8     += ("result for argument: " + m + " = " + r);
9   return 0;
10 }
11
12 function fib(m) { // 非 CPS 版
13   showArgument(m);
14   var r;
15   if (m < 2) {
16     r = 1;
17   } else {
18     r = fib(m - 1) + fib(m - 2);
19   }
20   showResult(m, r);
}
```

```

21     return r;
22 }
23
24 function exec() { fib(5); }

```

このプログラムは、計算途中の引数と戻り値を表示するようになっている。まずは、非 CPS 版と意味が変わらない、途中で止まらないバージョンを作成する。ここで fib は戻り値を持つので、接続は値を受け取る必要がある。

ファイル `Fib.js`

```

1  function showArgumentCPS(m, k) { // 暫定版
2      document.form.textarea.value
3          += ("argument = " + m + "\n");
4      return k(0);
5  }
6
7  function showResultCPS(m, r, k) { // 暫定版
8      document.form.textarea.value
9          += ("result for argument: " + m + " = " + r +
10         "\n");
11     return k(0);
12 }
13 function fibCPS(m, k) { // 最終版
14     return showArgumentCPS(m, function(ignore) {
15         function tmp(r) {
16             return showResultCPS(m, r, function(ingore) {
17                 return k(r);
18             });
19         }
20         if (m < 2) {
21             return tmp(1);
22         } else {
23             return fibCPS(m - 1, function(r1) {
24                 return fibCPS(m - 2, function(r2) {
25                     return tmp (r1 + r2);
26                 });
27             });
28         }
29     });
30 }
31
32 function doEnd(n) { // 暫定版
33     document.form.textarea.value
34         += "final result is " + n + " end\n";
35 }
36
37 function exec() { fibCPS(5, doEnd); }

```

これをハノイの塔のときと同じテクニックを使って途中で止まるように、プログラムを書き換える。

```

1  function showArgumentCPS(m, k) { // 最終版
2      document.form.textarea.value
3          += ("argument = " + m + "\n");
4      return k; // k(0) ではない
5  }
6
7  function showResultCPS(m, r, k) { // 最終版

```

```

8   document.form.textarea.value
9   += ("result for argument: " + m + " = " + r +
"\n");
10  return k; // k(0) ではない
11  }
12
13  /* fibCPS は変更なし */
14
15  function doEnd(n) { // 最終版
16  document.form.textarea.value
17  += "final result is " + n + " end\n";
18  return function(ignore) { return doEnd(n); };
19  }
20
21  var restart = function(ignore) {
22  return fibCPS(5, doEnd);
23  };
24  function exec() { restart = restart(0); }

```

これで、1行表示するたびに停止する。

問 7.3.1 上のやり方にならって（CPS を使って）、次の関数を「ボタンを押したら一つの線分を表示する」というバージョンに書き換えよ。

ファイル Sierpinski.js

```

1  var ctx;
2  var x = 256, y = 256, dx = 8, dy = 0, h = 0;
3
4  function forward() {
5  ctx.strokeStyle = "hsla(" + h + ", 100%, 50%, 0.8)";
6  h++;
7  ctx.beginPath(); ctx.moveTo(x, y);
8  ctx.lineTo(x += dx, y += dy);
9  ctx.closePath(); ctx.stroke();
10 return 0;
11 }
12
13 function turnLeft() {
14 var tmp = dx; dx = dy; dy = -tmp;
15 return 0;
16 }
17
18 function turnRight() {
19 var tmp = dx; dx = -dy; dy = tmp;
20 return 0;
21 }
22
23 function sierpinski(n) {
24 zig(n); zig(n);
25 return 0;
26 }
27
28 function zig(n) {
29 if (n <= 1) {
30 turnLeft(); forward(); turnLeft(); forward();
31 } else {
32 zig(n / 2); zag(n / 2); zig(n / 2); zag(n / 2);
33 }
34 return 0;
35 }
36

```

```

37 function zag(n) {
38   if (n <= 1) {
39     turnRight(); forward(); turnRight(); forward();
40     turnLeft(); forward();
41   } else {
42     zag(n / 2); zag(n / 2); zig(n / 2); zag(n / 2);
43   }
44   return 0;
45 }
46
47 function exec() {
48   var canvas = document.getElementById('canvas');
49   ctx = canvas.getContext("2d");
50   sierpinski(16);
51 }

```

ヒント: 関数 forward, sierpinski, zig, zag を CPS に変換する必要がある。関数 turnLeft, turnRight については、(この問題では) CPS にする必要はない。

問 7.3.2 関数 sierpinski をジェネレーター関数を使って、「ボタンを押したら一つの線分を表示する」というバージョンに書き換えよ。

接続の表現

JavaScript は匿名関数 (ラムダ式) を持っているため、CPS への変換は比較的容易であったが、ラムダ式を持たない言語や効率を重視する場合は、 を明示的に使用し、そのなかに接続に対応するデータを格納する必要がある。次のプログラムは、接続を n, a, b, c の各パラメーターと次に実行を開始すべき場所 (pc) から構成されるデータとしてハノイの塔を表現したものである (このように while 文と switch ~ case 文を用いて、goto 文を模倣する書き方のことは switch-in-a-loop construct というらしい。))。

```

1 // move は非 CPS 版と同じなので省略
2
3 var stack = new Array();
4 stack.push(new Array(5, 'a', 'b', 'c', 0));
5
6 function hanoiStack(n, a, b, c, pc) { // 明示スタック版
7   while (n>0) {
8     switch (pc) {
9       case 0:
10        stack.push(new Array(n, a, b, c, 1));
11        var tmp = c; c = b; b = tmp; n--;
12        continue;
13       case 1:
14        stack.push(new Array(n - 1, c, b, a, 0));
15        move(n, a, b);
16        return 0;
17     }
18   }
19   return exec();
20 }
21
22 function exec() { // 明示スタック版
23   if (stack.length > 0) {
24     var args = stack.pop();

```

```
25     return hanoiStack(args[0], args[1], args[2],
26                        args[3], args[4]);
27 } else {
28     document.form.textarea.value += "end\n";
29     return 0;
30 }
31 }
```

ここまでやってしまうとプログラムの実行途中で“接続”をファイルに保存したり、別のコンピュータで起動することさえ可能になる。
