第3章 正規表現と有限オートマトン

3.1 正規表現

_____(regular expression) は、言語（文字列・記号列の集合）の定義の方法の一つである。正規表現で記述可能な言語を正規言語 (regular language) という。

- 連接・選択・反復の 3 つの演算（構成法）を持つ。BNF と異なり再帰はない。
- BNF より表現力は弱い。つまり、正規表現で表現できる言語は BNF でも表現できる。
- ただし、BNF より効率よく実装できる。そのために、字句解析と構文解析をわける。

3.1.1 正規表現の定義

$\mathcal{A}$ を想定する文字の集合とする。

1. $\mathcal{A}$ の要素 a は $\mathcal{A}$ の上の正規表現である。
2. 空記号列（「 _ 」と書くことがある） は $\mathcal{A}$ の上の正規表現である。
3. x と y が $\mathcal{A}$ の上の正規表現であるとき、
    1. xy ・・・ x と y の_____
    2. $x|y$ ・・・ x と y の_____
    3. $x*$ ・・・ x の_____（x の 0 回以上の繰り返し）

    も $\mathcal{A}$ の上の正規表現である。

優先順位

正規表現の演算は 「*」、（連接）、「|」の順に優先する。演算の順番を変えるには適宜括弧「(〜)」を使用する。

a|b*c　　は、_____のことである。
a|bc*　　は? _____

省略記法

$x+$　　は、$xx*$（x の 1 回以上の繰り返し）
$x?$　　は、$x|\epsilon$（x の 0 回または 1 回の出現）
[abc]　　は、a|b|c
[a-z]　　は、a|b|...|z
[^abc]　　は、a, b, c 以外の任意の文字
[^a-z]　　は、a, b, ..., z 以外の任意の文字

ここで x は任意の正規表現、a, b, c, z は文字である。

例

a(a|b)a	は、{ aaa, aba }
a(ba)*a	は、{ aa, abaa, ababaa, ... }
("+"|"-")?[0-9]+	は、整数リテラル
[a-zA-Z_][a-zA-Z0-9_]*	は、C 言語で使える変数名

3.2 有限オートマトン

正規表現をプログラムで認識することを考える。

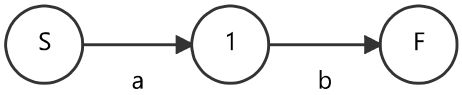
(finite automaton, FA) は正規表現を認識できる抽象機械である。

- いくつかの状態（すごろくの"マス"）を持つ。
- 入力データ（空の場合も含む）によって状態を移る。
- 開始状態 (start state)（すごろくの"ふりだし"）は一つだけある。
- 終了状態 (final state)（すごろくの"あがり"）は一つ以上ある。

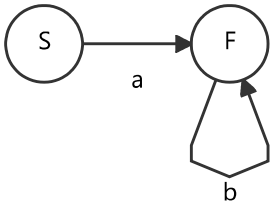
(state transition diagram) の一種である。
↑ 枝分かれの多い"すごろく"のようなものである。

例

"ab" を認識する FA

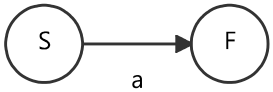


"ab*" を認識する FA



3.2.1 構成法

1文字や ϵ を認識する FA は明らかである。例えば、"a" を認識する FA は次のようになる。



それらをベースにして、以下のように正規表現を認識する FA を構成していく。

連接 $x\ y$

選択　$x \mid y$

反復　$x*$

このように正規表現に対応する文字列を認識する（受理する — つまり開始状態から終了状態に移る）FA を構成することができる。（実は、逆に FA から同じ文字列を認識する正規表現を構成することも可能である。）ただし、この構成法でできるのは、非決定性有限オートマトンである。

3.2.2 非決定性有限オートマトン

(nondeterministic finite automaton,) は入力によって移り先が一つに定まらないオートマトンである。（いくつかの可能性のうち、一つでも終了状態にたどりつけば受理となる。）これは、コンピュータープログラムとして実装するのには少し困る。

3.2.3 決定性有限オートマトン

(deterministic finite automaton,) は移り先が一つに定まるオートマトンである。

3.3 部分集合構成法

NFA を"同等の"（つまり同じ記号列を受理する）DFA に変換するアルゴリズム（　　）を紹介する。

アイデア: NFA の状態の集まり（部分集合）を DFA の一つの状態とみなす。

記号

$\epsilon\text{-}closure(s)$	NFA の状態 s から ϵ だけで遷移できる状態の集合
$move(T, A)$	NFA の状態の集合 T から a と ϵ だけで遷移できる状態の集合

$\epsilon\text{-}closure(S_0)$ を部分集合として付け加えて、それまでに付け加えられた部分集合 T に対して $move(T, a)$ を新しい状態として加えていく。（S_0 はもとの NFA の開始状態）

例

正規表現 (a|b)*abb に対応する NFA

これに部分集合構成法を適用する。

$\epsilon\text{-}closure(0) =$ ＿＿＿＿ $\equiv$ A とおく
$move(A, a) =$ ＿＿＿＿＿＿ $\equiv$ B
$move(A, b) =$ ＿＿＿＿＿＿ $\equiv$ C
$move(B, a) =$ ＿＿＿＿＿＿ $=$ B
$move(B, b) =$ ＿＿＿＿＿＿ $\equiv$ D
$move(C, a) =$ ＿
$move(C, b) =$ ＿
$move(D, a) =$ ＿
$move(D, b) =$ ＿＿＿＿＿＿ $\equiv$ E（9 は入らない）
$move(E, a) =$ ＿
$move(E, b) =$ ＿

まとめると次の図のようになる。

この例ではそうではないが、一般には状態数がとても多くなる。

3.4 DFA の状態数の最小化

DFA を同じ文字列を受理する状態数最小の DFA に変換することができる。（説明は割愛する。）正規表現の同値性の証明にも利用できる。

例

さきほどの DFA を最小化したものは次のようになる。

状態遷移表

以上の結果は次のように表（　　）にまとめることができる。

	AC	B	D	E
a				
b				

あとはプログラムにするだけである。

3.5 字句解析系の自動生成

以上の作業は自動化できる。lex や flex などのツールは、正規表現（とそれに対応する動作）から C 言語などで記述された字句解析部を自動生成する。ただし、自動生成に頼らず、手書きする場合もある。

3.6 （正規言語の）反復補題

正規表現では表現できない記号列の集合がある。例えば、正規表現は入れ子は表現できない。

より、一般的に次の補題が成り立つ。

正規言語の反復補題 (pumping lemma for regular languages)

反復補題は＿＿＿＿＿＿ともいう。

正規表現が表現する（つまり有限オートマトンが受理する）言語 L に対して、次のような条件を満たす自然数 $p\,(\geq 1)$ が存在する。

L に属する長さ p 以上の任意の文字列 w は $w = xyz$ と書けて、

1. y の長さは 1 以上である。
2. xy の長さは p 以下である。
3. すべての $i\,(\geq 0)$ に対して、xy^iz も L に属する。

証明は、有限オートマトンの状態数が p ならば、p 以上の長さの記号列を読み込んだときに、必ず以前と同じ状態に到達することから言える。

例

$\{\,\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \ldots\,\}$ のように「(」と「)」を同数個含む記号列の集合 L は、正規表現では表せない。

証明: 正規表現で表せたとして矛盾を導く。L を正規表現で表せたとすると、ポンプの補題により、上のような条件を満たす自然数 p が存在する。$w = (^p)^p$ とする。すると、$w = xyz$ と分解したときに、y の部分には「(」しか存在しない。このとき、xy^2z は「(」と「)」の数が異なるが、L に属することになり矛盾する。