第3章 正規表現と有限オートマトン

3.1 正規表現

________(________とも言う、regular expression) は、言語（language, 文字列・記号列の集合）の定義の方法の一つである。正規表現で記述可能な言語を正規言語 (正則言語とも言う、regular language) という。

- 連接・選択・反復の 3 つの演算（構成法）を持つ。BNF と異なり再帰はない。
- BNF より表現力は弱い。つまり、正規表現で表現できる言語は BNF でも表現できる。
- ただし、BNF より効率よく実装できる。そのために、字句解析と構文解析をわける。

3.1.1 正規表現の定義

$\mathcal{A}$ を想定する文字の集合とする。

1. $\mathcal{A}$ の要素 `a` は $\mathcal{A}$ の上の正規表現である。
2. 空記号列（「__」と書くことがある） は $\mathcal{A}$ の上の正規表現である。
3. x と y が $\mathcal{A}$ の上の正規表現であるとき、
    1. $x\,y$ $\cdots$ x と y の____
    2. $x\,|\,y$ $\cdots$ x と y の____
    3. $x*$ $\cdots$ x の____ （x の 0 回以上の繰り返し）

    も $\mathcal{A}$ の上の正規表現である。

（正規表現の書き方はいろいろな流儀があるが、ここでは flex の記法に準じたものを紹介する。例えば、教科書では x の 0 回以上の繰り返しを $\{x\}$ と書く流儀を採用している。）

優先順位

正規表現の演算は 「`*`」、（連接）、「`|`」の順に優先する。演算の順番を変えるには適宜括弧「`(`〜`)`」を使用する。

`a|b*c` は、__________のことである。
`a|bc*` は、__________のことである。

省略記法

$x+$ は、$xx*$ （x の 1 回以上の繰り返し）
$x?$ は、$x\,|\,\varepsilon$ （x の 0 回または 1 回の出現）
`[abc]` は、`a|b|c`

`[a-z]`	は、a|b|…|z
`[^abc]`	は、a, b, c 以外の任意の文字
`[^a-z]`	は、a, b, …, z 以外の任意の文字

ここで x は任意の正規表現、a, b, c, z は**文字**である。なお「+」と「?」は「*」と同じ優先順位である。

例

`a(a|b)a`	は、{ aaa, aba }
`a(ba)*a`	は、{ aa, abaa, ababaa, … }
`("+"|"-")?[0-9]+`	は、整数リテラル
`[a-zA-Z_][a-zA-Z0-9_]*`	は、C 言語で使える変数名

「+」や「-」は正規表現で特別な意味を持つ記号なので、「"+"」や「"-"」のように二重引用符で囲むことによって、「+」「-」という文字そのものを表している。「\+」のように「\」（バックスラッシュ）を使って表すこともある。

> **問 3.1.1** 次の正規表現が表す文字列のうち、文字数が 5 以下のものをすべて列挙せよ。
>
> 1. `(a|bc)*ab?`
> 2. `(a?b)*b?c?`

3.2 有限オートマトン

正規表現をプログラムで認識することを考える。

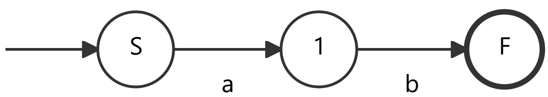
____________(finite automaton, FA) は正規表現を認識できる抽象機械である。

- いくつかの状態（すごろくの"マス"）を持つ。
- 入力データ（空の場合も含む）によって状態を移る。
- 開始状態 (start state)（すごろくの"ふりだし"）は一つだけある。
- 終了状態 (final state)（すごろくの"あがり"）は一つ以上ある。

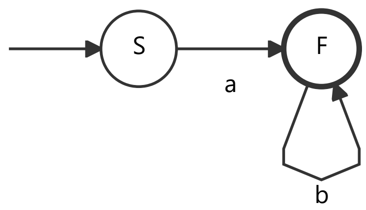
________(state transition diagram) の一種である。
↑枝分かれの多い"すごろく"のようなものである。

例

"ab" を認識する FA

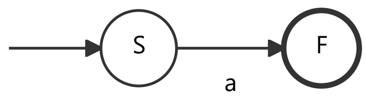


"ab*" を認識する FA



3.2.1 構成法

1 文字や ε を認識する FA は明らかである。例えば、"a" を認識する FA は次のようになる。



それらをベースにして、以下のように正規表現を認識する FA を構成していく。

連接 $x\ y$

選択　$x \mid y$

反復　$x*$

このように正規表現に対応する文字列を認識する（受理する — つまり開始状態から終了状態に移る）FA を構成することができる。 ただし、この構成法でできるのは、非決定性有限オートマトンである。

3.2.2 非決定性有限オートマトン

____________________(nondeterministic finite automaton, ____) は入力によって移り先が一つに定まらないオートマトンである。（いくつかの可能性のうち、一つでも終了状態にたどりつけば受理となる。）これは、コンピュータープログラムとして実装するのには少し困る。

3.2.3 決定性有限オートマトン

____________________(deterministic finite automaton, ____) は移り先が一つに定まるオートマトンである。

3.3 部分集合構成法

NFA を”同等の”（つまり同じ記号列を受理する）DFA に変換するアルゴリズム（____________）を紹介する。

アイデア: NFA の状態の集まり（部分集合）を DFA の一つの状態とみなす。

記号

$\varepsilon\text{-}closure(s)$	NFA の状態 s から ε だけで遷移できる状態の集合
$move(T, a)$	NFA の状態の集合 T から a と ε だけで遷移できる状態の集合

$\varepsilon\text{-}closure(S_0)$ を部分集合として付け加えて、それまでに付け加えられた部分集合 T に対して $move(T, a)$ を新しい状態として加えていく。（S_0 はもとの NFA の開始状態）

例

正規表現 `(a|b)*abb` に対応する NFA

これに部分集合構成法を適用する。

$$
\begin{array}{lclcll}
\varepsilon\text{-}closure(0) & = & \underline{\qquad\qquad} & \equiv & \underline{\quad} & \text{とおく} \\
move(A, a) & = & \underline{\qquad\qquad\qquad} & \equiv & \underline{\quad} & \text{とおく} \\
move(A, b) & = & \underline{\qquad\qquad\quad} & \equiv & \underline{\quad} & \text{とおく} \\
 & = & & \equiv & \underline{\quad} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
move(B,a) & \quad \underline{\qquad\qquad\qquad} \\
move(B,b) &= \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad \equiv \quad \underline{\quad}\text{とおく} \\
move(C,a) &= \underline{\ } \\
move(C,b) &= \underline{\ } \\
move(D,a) &= \underline{\ } \\
move(D,b) &= \underline{\qquad\qquad\qquad\ } \equiv \quad \underline{\quad} \ \text{(9 は入らない)} \\
move(E,a) &= \underline{\ } \\
move(E,b) &= \underline{\ }
\end{aligned}
$$

まとめると次の図のようになる。

____

これがもとの NFA と同等な DFA になっているが、その証明は割愛する。

また、この例では a と b の 2 文字しか使っていないので状態数はそう多くないが、一般的には NFA から作った DFA は状態数がとても多くなる。

3.4 DFA の状態数の最小化

DFA を同じ文字列を受理する状態数最小の DFA に変換することができる。

- まず、状態を最終状態とそれ以外の状態の 2 つの部分集合にわける。
- 前のステップの分割を"区別"する入力があれば、さらに部分集合に分割する。これを、区別する入力がなくなるまで繰り返す。

「区別する」... 同じ部分集合に属する状態から、ある入力での行先が別の部分集合になること

例

E だけが最終状態なので、先ほどの DFA はまず、次のような 2つの部分集合に分けられる。

____________ と ____

ここで、$D \xrightarrow{\text{b}} E$ だが A, B, C からは b によって E に移動できないので、次の分割は次のようになる。

_________ と ____ と $\{E\}$

さらに、$B \xrightarrow{\texttt{b}} D$ だが A, C からは b によって D に移動できないので、次の分割は次のようになる。

_______ と ____ と $\{D\}$ と $\{E\}$

ここで、$A \xrightarrow{\texttt{a}} B$ かつ $C \xrightarrow{\texttt{a}} B$ で $A \xrightarrow{\texttt{b}} C$ かつ $C \xrightarrow{\texttt{b}} C$ なので、A と C を区別する入力はない。つまり、これ以上は分割できない。

結局、A と C は一つの状態としてまとめることができ、先ほどの DFA を最小化したものは次のようになる。

また、これも証明は割愛するが、同じ言語を受理する状態数最小の DFA はただ一つであることを示すことができる。 このことから、DFA の状態数を最小化することで、正規表現の同値性を証明することもできる。

状態遷移表

以上の結果は次のように表（__________）にまとめることができる。

	a	b
AC		
B		
D		
E		

あとはこれをプログラムにするだけである。

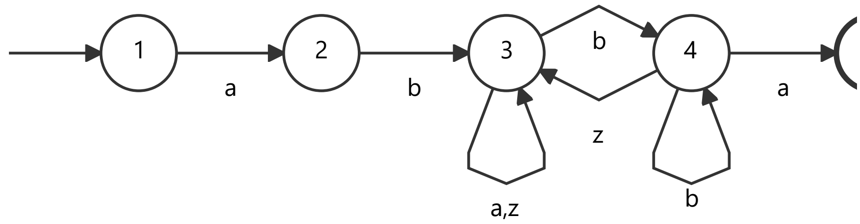
3.5 字句解析系の自動生成

以上の作業は自動化できる。`lex` や `flex` などのツールは、正規表現（とそれに対応する動作）から C 言語などで記述された字句解析部を自動生成する。ただし、自動生成に頼らず、手書きする場合もある。

3.6 有限オートマトンと正規表現の同値性

決定性有限オートマトン (DFA) から同じ文字列を認識する正規表現を構成することができる。 つまり、正規表現で表現できる言語全体（つまり、正規言語）と有限オートマトンで受理できる言語全体は一致する。例を使って、構成法を説明する。

例:



決定性有限オートマトンの状態に 1 から n までの番号がつけられているとする。そして R^k_{ij} という記号を途中で k を超える状態を通ることなしに、状態 i から状態 j へ遷移させる文字列の集合を表す正規表現とする。特に R^0_{ij} は途中に他の状態を通らずに状態 i から状態 j へ遷移させる文字列の集合を表す正規表現である。

上のオートマトンの場合は、次のようになる。

$R^0_{11} = \varepsilon,\ R^0_{12} = \mathtt{a},\ R^0_{22} = \varepsilon,\ R^0_{23} = \mathtt{b},\ R^0_{33} = \varepsilon\mathtt{|a|z},\ R^0_{34} = \mathtt{b},$
$R^0_{44} = \varepsilon\mathtt{|b},\ R^0_{43} = \mathtt{z},\ R^0_{45} = \mathtt{a},\ R^0_{55} = \varepsilon,$

それ以外の i, j については $R^0_{ij} = \emptyset$ である。（空集合 $\emptyset$ に対応する正規表現を、やはり $\emptyset$ で表すことにする。）

上の例で開始状態を 1、終了状態を 5 とするとき、R^5_{15} とそれを表す正規表現を構成できればよい。ここで一般に $k > 0$ のとき

$$R^k_{ij} = R^{k-1}_{ij} \mid R^{k-1}_{ik}(R^{k-1}_{kk}) * R^{k-1}_{kj}$$

という関係が成り立つ。

これにより、まずすべての i, j に対して $R^1_{ij} = R^0_{ij}$ となる。

次に $R^2_{13} = R^1_{13} \mid R^1_{12}R^1_{22} * R^1_{23} = \mathtt{ab}$ となり、 それ以外の i, j に対しては $R^2_{ij} = R^1_{ij}$ となる。

以下では、必要なものだけ計算していくと、

$R^3_{14} = R^2_{14} \mid R^2_{13}R^2_{33} * R^2_{34} = \mathtt{ab(a|z)*b},$
$R^3_{44} = R^2_{44} \mid R^2_{43}R^2_{33} * R^2_{34} = \varepsilon\mathtt{|b|z(a|z)*b},$
$R^4_{15} = R^3_{15} \mid R^3_{14}R^3_{44} * R^3_{45} = \mathtt{ab(a|z)*b(b|z(a|z)*b)*a}$
$R^5_{15} = R^4_{15}$

となり、求める正規表現は `ab(a|z)*b(b|z(a|z)*b)*a` である。ちなみに DFA の状態につける番号の順を逆にすると、この手順で求まる正規表現は `ab(a|z|bb*z)*bb*a` となるが、どちらも同等の正規表現である。

3.7 （正規言語の）反復補題

正規表現では表現できない記号列の集合がある。例えば、正規表現はかっこの入れ子は表現できない。

より、一般的に次の補題が成り立つ。

正規言語の反復補題 (pumping lemma for regular languages)

反復補題は____________ともいう。

正規表現が表現する（つまり有限オートマトンが受理する）言語 L に対して、次のような条件を満たす自然数 $p\ (\geq 1)$ が存在する。

L に属する長さ p 以上の任意の文字列 w は $w = xyz$ と書けて、

1. y の長さは 1 以上である。
2. xy の長さは p 以下である。
3. すべての $i\ (\geq 0)$ に対して、xy^iz も L に属する。

証明は、有限オートマトンの状態数が $p-1$ ならば、 p 以上の長さの記号列を読み込んだときに、必ず以前と同じ状態に到達することから言える。

例

$\{\,\varepsilon, (), (()), ((())), (((()))), \ldots\,\}$ のように「(」と「)」を同数個含む記号列の集合 L は、正規表現では表せない。

証明: 正規表現で表せたとして矛盾を導く。L を正規表現で表せたとすると、ポンプの補題により、上のような条件を満たす自然数 p が存在する。$w = (^p)^p$ とする。すると、$w = xyz$ と分解したときに、 y の部分には「(」しか存在しない。このとき、xy^2z は「(」と「)」の数が異なるが、 L に属することになり矛盾する。

3.8 正規言語の閉包性

正規表現と有限オートマトンの同値性から、次のような事実もすぐに導かれる。

- 正規言語の補集合も正規言語である。
- 2 つ以上の正規言語の共通部分も正規言語である。

などである。